Chapitre :
Probabilités

∽

⊛ **Activité :** A, Bp110 (rappels)

I. Probabilités conditionnelles

⊛ **Activité :** 1p111

Définition On considère une expérience aléatoire et l'ensemble des issues E muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$. Soit A et B deux événements de E, A étant de probabilité non nulle.
La probabilité de B sachant A (ou « sachant que A est réalisé »), notée $\mathbb{P}_A(B)$ est définie par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Exemple Dans le cas où l'on peut observer deux critères A et B sur des individus, on peut par exemple obtenir un tel tableau :

	A	$\overline{A}$	Total
B	2	5	7
$\overline{B}$	2	1	3
Total	4	6	10

on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{10}$ et $\mathbb{P}(A) = \dfrac{4}{10}$. Alors $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\frac{2}{10}}{\frac{4}{10}} = \dfrac{2}{10} \times \dfrac{10}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Dans l'activité 1p111, le tableau n'était pas donné de la même manière. Il donnait $\mathbb{P}_G(C) = 0,73$ et $\mathbb{P}(G) = 0,43$.
Puisque $\mathbb{P}_G(C) = \dfrac{\mathbb{P}(G \cap C)}{\mathbb{P}(G)}$,
On a donc $\mathbb{P}(G \cap C) = \mathbb{P}(G) \times \mathbb{P}_G(C) = 0,3139$.
Autrement dit, avec les événements A et B de la définition, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$$

Propriété **(Probabilités totales)** Soit A un événement. L'événement $\overline{A}$ étant son contraire, A et $\overline{A}$ forment une **partition** de E.
Cela signifie que $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (les deux événements sont **incompatibles**)
Quelque soit l'événement B, on a $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$ et $(A \cap B)$ et $(\overline{A} \cap B)$ sont incompatibles.
On a alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

Shéma, diagramme de Venn (p114)

Cette propriété se généralise pour un ensemble d'événements formant une partition de E :

Théorème Si les événements A_1, A_2,..., A_n forment une partition de E, alors pour tout événement B,

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(B) & = & \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \cdots + \mathbb{P}(B \cap A_n) \\ & = & \mathbb{P}_{A_1}(B)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{A_2}(B)\mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n)\end{array}$$

▶ **Exercices :** 33p128, 37,38,39,40p128, 42,45p129

II. Indépendance

Définition Soit A et B deux événements de E. On dit que A et B sont indépendants si la probabilité de l'un de dépend pas de la réalisation de l'autre. C'est à dire :

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \text{ ou } \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

Ceci est généralement équivalent à :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

⚠ la dernière égalité est en générale fausse. Elle n'est vrai par définition que lorsque A et B sont indépendants.
Voir page 116 trois visions de l'indépendance.
Voir page 116 encore le principe multiplicatif (jets successifs et indépendants d'une pièce de monnaie)

▶ **Exercices :** 52,53p130, 60p131

▶ **Exercice :** 61p131 en DM

III. Espérance et variance

⊛ **Activité :** Dp110 (moyenne et variance d'une série statistique)
Soit x_1, x_2, ..., x_n l'ensemble des résultats numériques d'une expérience aléatoire. Soit $p_1 = \mathbb{P}(x_1)$, $p_2 = \mathbb{P}(x_2)$, ..., $p_n = \mathbb{P}(x_n)$ la loi de probabilité associée. On a $p_1 + \cdots + p_n = 1$.
Alors l'**espérance de la loi** est donné par :

$$\mu = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$$

Elle correspond à la moyenne pour une série statistique (la fréquence correspond à la probabilité).
La **variance** est donnée par :

$$\sigma^2 = V = p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \cdots + p_n(x_n - \mu)^2 = (p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \cdots + p_nx_n^2) - \mu^2$$

$\boxed{\textbf{Propriété}}$ Si on ajoute (ou retranche) un même nombre b à toutes les valeurs x_i, alors on fait de même pour l'espérance.
Si on multiplie (ou divise) par un même nombre a toutes les valeurs x_i, alors on fait de même pour l'espérance.

▶ **Exercices :** 16,17,18p124

IV. Loi binomiale

⊛ **Activité :** fiche

1. Loi de Bernoulli

Définition Lorsqu'une expérience aléatoire n'a que deux issues possibles, appelées succès et échec, on la nomme épreuve de Bernoulli.
On note p la probabilité de succès (et $q = 1 - p$ la probabilité d'échec).
La loi de probabilité est appelée loi de Bernoulli, de paramètre p, et est notée $\mathcal{B}(p)$.

Tableau

2. Loi binomiale

Définition En répétant n fois de suite de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre p, on peut compter le nombre de succès, qui va donc de 0 à n.
La loi binomiale est la loi qui associe à tout nombre i (de 0 à n) la probabilité d'avoir i succès.
La loi binomiale a deux paramètres : la probabilité p de succès de la loi de Bernoulli et le nombre n d'épreuves. On la note $\mathcal{B}(n;p)$.

La loi est donnée par la formule suivante :

$$P(i) = n_i p^i (1-p)^{n-i}$$

où n_i est le nombre de manière de choisir i éléments parmi n.

Arbre avec $n = 4$, loi pour $n = 4$

▶ **Exercices :** 65,66,68p132