Chapitre : Logarithme

I. Introduction

⊛ **Activité :** 2p81 (la fonction inverse n'est pas une dérivée de puissance de x)

1. Définition

Définition La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ telle que :
- Sa dérivée est la fonction inverse : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- l'image de 1 est nulle : $\ln(1) = 0$.

⚠ Le logarithme d'une expression négative (ou nulle) n'existe pas !

2. Premières propriétés

Propriété Pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Preuve : a étant un réel strictement positif fixé, définissons la fonction g sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(ax) - [\ln(a) + \ln(x)]$$

On veut prouver que $g(b) = 0$; Pour cela il suffit de prouver que g est la fonction constante égale à 0.
Or g est dérivable, et $g'(x) = a \times \ln'(ax) - \ln'(x) = a \times \dfrac{1}{ax} - \dfrac{1}{x} = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = 0$. Donc g est constante sur $]0;+\infty[$. En particulier, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) = g(1) = \ln(a) - [\ln(a) + \ln(1)] = 0$. □

Propriété À partir de la propriété précédente on peut aussi démontrer :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n \times \ln(a) \qquad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Preuve : Exercice (la troisième est admise). □

▶ **Exercices :** 19,21 (ensembles de def), 23,24,25 (produit en somme), 26,27 (dérivée simple) p94

II. Variations de ln

Propriété La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. De plus :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Preuve : La dérivée de la fonction ln étant la fonction inverse, et comme $\dfrac{1}{x} > 0$ sur $]0;+\infty[$, on obtient rapidement de ln est croissante. Les limites sont prouvées page 86. □

Remarque la courbe de ln admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Remarque $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ donc la tangente à la courbe de ln en $x = 1$ a pour équation

$$y = 1(x-1) + 0 = x - 1$$

Cela permet de tracer une représentation de ln

Courbe de ln

III. Équations et inéquations

La fonction étant strictement croissante, on a :

Propriété Pour A et B des réels strictement positifs,

$$\ln(A) = \ln(B) \Leftrightarrow A = B \qquad \ln(A) \leq \ln(B) \Leftrightarrow A \leq B$$

Puisque ln est continue et strictement croissante, que $\ln(1) = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique nombre, noté e, tel que :

$$\ln(e) = 1$$

Propriété Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors l'équation $\ln(x) = m$ a pour unique solution $x = e^m$.
De même, $\ln(x) \geq m \Leftrightarrow x \geq e^m$ (de même dans l'autre sens).

Preuve : Voir page 84. □

▶ **Exercices :** 40,42,44,45p96 (équations), 50,54p96 (inéquations)

IV. Limites avec $\ln(x)$

Propriété

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$$

Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

Preuve : Pour la première et la troisième, voir page 86. On prouve la seconde à l'aide de la première.
Pour $x > 0$ on définit $X = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers 0, X tend vers $+\infty$.
Or, $x\ln(x) = \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{\ln(X)}{X}$. Donc

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln(X)}{X} = 0$$

□

▶ **Exercices :** 60,62,63,64,66,67p97

▶ **Exercices :** 73,77p98