Chapitre :
Primitives et intégrales

$\backsim$

I. Primitives

⊛ **Activité :** 1p171

1. Définition et premières propriétés

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit F une fonction. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Exemple $f(x) = 2x + 3$ et $F(x) = x^2 + 3x + 5$, définies sur $\mathbb{R}$.

Théorème Soit F une primitive de f sur I. Alors toutes les primitives G de f sur I s'écrivent sous la forme :

$$G(x) = F(x) + k$$

où $k \in R$

Preuve : On prouve d'abord que G est bien une primitive de f.
On prouve ensuite que si G est une primite de f, alors $F - G$ est une fonction constante. □

Remarque Graphiquement, deux primitives sont représentées par deux courbes dont l'une est une translation verticale de l'autre (l'écart entre les deux est une constante).

Remarque Il existe une unique primitive prenant une valeur y_0 donnée en une valeur x_0 donnée.

Exemple primitive de f plus haut s'annulant en 2.

Propriété Soit f et g deux fonctions définies sur I et soit F et G deux primitives sur I de f et g respectivement. Alors la fonction $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

Preuve : On sait que $(F + G)' = F' + G' = f + g$. □

Propriété Soit f une fonction définie sur I et F une primitive de f sur I. Soit α un réel fixé. Alors αF est une primitive de αf sur I.

Preuve : On sait que $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$. □

► **Exercices :** 14,16,17,18,19,21p186

2. Recherche de primitives

Tableau de primitives
Voir page 174

Exemple D et Ep175

- ▶ **Exercices :** 34,37,39p188
- ▶ **Exercices :** 42,44p189

II. Intégrale

⊛ **Activité :** 1p170 (seulement la question 3)

⊛ **Activité :** 2p171

Définition Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors l'intégrale de la fonction f entre a et b est le nombre $F(b) - F(a)$. On le note :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemple $\int_0^1 x^2 dx$

Remarque Le choix de la primitive n'a pas d'importance (les constantes se simplifiant durant la soustraction).

Propriété Graphiquement, lorsque la fonction f est positive, l'intégrale correspond à l'aide se situant entre la courbe et l'axe des abscisses.

Preuve : Admis □

Dessin

Exemple Fonction affine

Propriété

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la définition et d'observer. □

▶ **Exercices :** 57,58,60,62p190 et 67p191

1. Propriétés

Théorème **(Relation de Chasles)** Soit f une fonction continue sur I et a, b et c trois réels de I. Alors :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Dessin

▶ **Exercices :** 77,78p193

Théorème **(Linéarité de l'intégrale)** Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et k un réel. Alors :

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Preuve : Exercice. □

Représentation : voir page 178.

Propriété Soit f et g deux fonctions définies sur $[a;b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)dx$$

Preuve : Dessin pour des fonctions positives □

Exemple Exercice 75p193

2. Valeur moyenne

Définition Soit f une fonction définie sur $[a;b]$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ la valeur de :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Graphiquement, dans le cas où f est une fonction positive, μ est la hauteur du rectangle de longueur $b-a$ qui a la même aire que celle entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

dessin

(Lire page 180 indice de Gini et surplus)

► **Exercices :** 87,88p195

► **Exercice :** (primitives) 36p188