Chapitre :
Fonction exponentielle

∽

Rappel exercices A,B,C,D p140 (logarithme, puissances) (E en spécialité)

I. Définition et règles de calcul

⊛ **Activité :** 1p141 (utilisation de la courbe de ln)

Définition Pour tout réel $a \in]-\infty;+\infty[$, il existe un unique réel b de $]0;+\infty[$ tel que $\ln(b) = a$.
On note $b = \exp(a)$
La fonction exp, définie sur R, vérifie donc :

$$\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

Exemple $\exp(x) = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) \Leftarrow x = 0$, donc $\exp(0) = 1$

Définition Nous savons déjà que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\ln(e^n) = n$. Donc $\exp(n) = e^n$.
On généralise alors cette propriété en notant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = e^x$$

Propriété
– Pour tout réel x, $e^x > 0$
– Pour tout réel x,

$$\ln(e^x) = x$$

– Pour tout réel x strictement positif,

$$e^{\ln x} = x$$

Propriété Pour tous réels a et b et tout entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad e^{na} = (e^a)^n$$

Preuve : L'idée est de raisonner par équivalence en utilisant le logarithme dont nous connaissons des propriétés :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \Leftrightarrow \ln(e^{a+b}) = \ln(e^a \times e^b) \Leftrightarrow \ln(e^{a+b}) = \ln(e^a) + \ln(e^b) \Leftrightarrow a+b = a+b$$

Les autres se font dans le même esprit. □

Exemple $e^{\ln 2 - x} = \dfrac{e^{\ln 2}}{e^x} = \dfrac{2}{e^x} = 2e^{-x}$

Exemple Pour résoudre une équation avec une exponentielle, on peut appliquer le logarithme :

$$e^{x+2} = 5 \Leftrightarrow \ln(e^{x+2}) = \ln(5) \Leftrightarrow x + 2 = \ln(5) \Leftrightarrow x = \ln 5 - 2$$

De même pour les inéquations (en n'oubliant pas que le logarithme est croissant).

▶ **Exercices :** 18,19,20,21,24 p154 (équations et inéquations)

▶ **Exercices :** 22,25,26 (éventuel changement de variable – voir Bp143)

II. Variation et limites

Propriété La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle :

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Puisque la fonction exponentielle est positive, on en déduit alors que la fonction exponentielle est croissante.

Preuve : En admettant que la fonction exp est dérivable, on définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(\exp(x))$. La fonction f est donc dérivable, et par composée,

$$f'(x) = \exp'(x) \times \ln'(\exp(x)) = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(e^x) = x$, donc $f'(x) = 1$. On a donc :

$$1 = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} \Leftrightarrow \exp'(x) = \exp(x)$$

□

Exemple lire page 145 (dérivation avec e^x)

▶ **Exercices :** 38,39,41p155 (variations de fonctions)

Théorème

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Preuve : On démontre que $e^x > x$ en étudiant $g(x) = e^x - x$. On obtient la limite en $+\infty$ par comparaison.
Par changement de variable et en utilisant $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, on obtient la limite en $-\infty$. □

Remarque L'axe des abscisses est donc une asymptote à la courbe de la fonction *exp* en $-\infty$.

Tableau de valeurs de exp
Représentation graphique de la fonction

Propriété

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

Preuve : On pose $X = e^x$, on a donc $\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{X}{\ln X}$, dont on connaît la limite en $+\infty$. De même, $xe^x = \ln(X)X$, dont on connaît la limite en 0^+. □

Exemple lire page 145 (limites avec e^x)

▶ **Exercices :** 34,35,37p155 (limites)

▶ **Exercices :** 42,44,45,50,49,51p156

III. Exponentielle d'une fonction

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
On considère la fonction $\exp \circ u$, notée e^u.

1. variations de e^u

Propriété Les fonctions u et e^u ont les mêmes variations.

Preuve : En effet, la fonction exp étant croissante, si u a la même variation alors leur composée est croissante, et si u a la variation contraire, alors leur composée est décroissante. □

Exemple $u(x) = -x^2$

2. Dérivée de e^u

Propriété La fonction e^u est dérivable sur u et :

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

Preuve : On utilise la dérivée d'une composée :

$$(e^u)' = (\exp u)' = u' \times \exp'(u) = u' \exp(u) = u'e^u$$

□

Exemple avec la même fonction que précédemment.

3. Limites de e^u

On utilise les règles de composition de limites.

Propriété Soit a un réel ou $\pm\infty$ et l un réel.
- Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = e^l$
- Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = 0$

▶ **Exercices :** 57,58,61p158

▶ **Exercices :** 64p158 (dérivées) 67p159 (limites)

★ **Approfondissement :** 62,63p158

IV. Fonction puissance

1. Définition

Remarque Pour tout réel **positif** a et tout entier n, nous savons que :

$$a^n = e^{\ln(a^n)} = e^{n\ln(a)}$$

On généralise la puissance à un nombre réel :

Définition Soit a un nombre **positif** et x un réel. Le nombre a^x est défini par :

$$a^x := e^{a\ln(x)}$$

Remarque On ne définit la puissance quelconque que d'un nombre **positif**.

Exemple $a^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln(a)} = e^{\ln(\sqrt{a})} = \sqrt{a}$

Exemple Si $a = e$, on retrouve la fonction exponentielle : $e^x = e^{x\ln(e)} = e^{x\times 1} = e^x$.

Les règles de calcul avec les puissances réelles restent les mêmes que celles avec les puissances entières. Ainsi, par exemple $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3}3} = a^1 = a$.

Propriété Soit $a > 0$.
- Si $a > 1$, alors $x \mapsto a^x$ est croissante.
- Si $a < 1$, alors $x \mapsto a^x$ est décroissante.

Preuve : On a par définition $a^x = e^{x\ln(a)}$. La fonction a donc pour dérivée $x \mapsto \ln(a)e^{x\ln(a)}$, qui est donc du signe de $\ln(a)$. □

Propriété On a les limites suivantes :
- Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.
- Si $a < 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

Preuve : Exercice □

Propriété Soit b un nombre positif. L'équation $x^n = b$ a une unique solution x positive, il s'agit de $x = b^{\frac{1}{n}}$.
On appelle cette solution la racine $n^{\text{ième}}$ de b.

Preuve : Son existence et son unicité proviennent des variations de $x \mapsto x^n$. Sa valeur se vérifie aisément. □

2. Applications

Le terme général d'une suite géométrique de termes positifs (premier terme u_0 et raison q positifs) peut s'écrire sous une forme exponentielle.
En effet, $u_n = u_0 q^n = e^{\ln(u_0)} \times e^{n\ln(q)} = e^{\ln(u_0)+n\ln(q)} = e^{An+b}$ avec $A = \ln(q)$ et $B = \ln(u_0)$.
C'est pour cela que l'on parle de croissance exponentielle pour une suite géométrique (qui est une vraie croissance si $q > 0$).
Si l'on considère qu'une variation d'une variable y est exponentielle par rapport à x, on peut chercher à faire un ajustement exponentiel.

Exemple p149 : on pose $y = e^{ax+b}$, et l'on cherche a et b. En posant $t = \ln(y)$, on obtient que $t = ax + b$. Il suffit alors de faire un ajustement affine de t en fonction de x, ce qui nous donne a et b. Voir la méthode p149.

▶ **Exercices :** 81p160 et 82p161

▶ **Exercices :** 87p162

Définition On appelle moyenne géométrique (à distinguer de la moyenne arithmétique, usuelle) de n nombres positifs $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ le nombre :

$$(a_1 \times a_2 \cdots \times a_n)^{\frac{1}{n}}$$

Nous avons déjà vu des exercices de recherche de taux global sur plusieurs années. On peut maintenant s'intéresser à la recherche de taux moyen annuel.

Exemple p149 : on passe de 136 à 95 en 7 années. Le taux moyen annuel x vérifie $136(1+x)^7 = 95$. Donc :

$$(1+x)^7 = \frac{95}{136} \quad \Leftrightarrow \quad (1+x) = \left(\frac{95}{136}\right)^{\frac{1}{7}} \quad \Leftrightarrow \quad x \simeq -0,05$$

Le taux global, lui, vérifie $136(1+x) = 95$, donc $x = \dfrac{95}{136} - 1 \simeq -0,30$.

Voir une autre représentation sur le livre page 149.

▶ **Exercices :** 79,80p160

▶ **Exercices :** 83,84,86p161