

Devoir surveillé n°02 – mathématiques
23/11/2011

Exercice 1 (4 points) Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0; 1; 2; \dots; 24; 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante : étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$. étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7. étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

- Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?
- Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.
- Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.
 - Dans cette question, toute trace de recherche pertinente sera prise en compte.
On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p . Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26.
 - En déduire que $n = p$.
 - Coder le mot AMI.
- On se propose de décoder la lettre E.
 - Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.
 - On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.
 - On admet que l'ensemble des solutions est donné par $(-10 + 26k; -2 + 5k)$ où k est un nombre entier relatif.
En déduire qu'il existe un unique couple $(x; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leq x \leq 25$.
 - Décoder alors la lettre E.