

Devoir surveillé n°04 – mathématiques  
01/02/2012

**Exercice 1 (5 points)** Les deux parties A et B sont indépendantes.

**Partie A**

On considère l'équation notée  $(G)$

$$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

1. Montrer que  $100 \equiv 2 \pmod{7}$ .

Démontrer que si  $(x ; y)$  est solution de  $(G)$  alors  $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$ .

2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de $x$ par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

3. Démontrer que  $2^n$  est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

En déduire que l'équation  $(G)$  n'admet pas de solution.

**Partie B**

On considère le système de congruences :

$$(S) \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}, \text{ où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1. Montrer que 11 est solution de  $(S)$ .
2. Montrer que si  $n$  est solution de  $(S)$  alors  $n - 11$  est divisible par 3 et par 5 (donc par 15).
3. Réciproquement, montrer que si  $n - 11$  est divisible par 15, alors  $n$  est solution de  $(S)$ .