LYCÉE ALFRED KASTLER **TS-spé**
2011–2012

Devoir surveillé n°06 – mathématiques
09/05/2012

Exercice 1 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.
Prérequis : L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.

Démontrer que si A, B, A′ et B′ sont quatre points du plan tels que A $\neq$ B et A′ $\neq$ B′, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A′ et B en B′.

Partie B

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.
On note D le symétrique de A par rapport au point C.
On désigne par s la similitude directe transformant D en C et C en B.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.
2. On appelle Ω le centre de la similitude s.
   (a) En utilisant la relation $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\Omega\mathrm{C}} - \overrightarrow{\Omega\mathrm{D}}$, démontrer que $\mathrm{DC}^2 = \Omega\mathrm{D}^2$.
   (b) En déduire la nature du triangle ΩDC.
3. On pose $\sigma = s \circ s$.
   (a) Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   (b) Déterminer l'image du point D par la transformation σ.
4. Démontrer que le quadrilatère ADΩB est un rectangle.
5. Dans cette question, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 1, i et 2i.
   (a) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est :
   $z' = (1+\mathrm{i})z + 2 - \mathrm{i}$ où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par s.
   (b) On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
   Démontrer que $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - y + 2 \\ y' & = & x + y - 1 \end{array}\right.$
   (c) Soit J le point d'affixe $1 + 3\mathrm{i}$.
   Existe-t-il des points M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AJ}} = 0$, M' désignant l'image du point M par s ?