

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.

On supposera connu le résultat suivant :

Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B' , alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' .

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique 2 cm.

On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives

$$z_A = 2i, z_B = 2, z_C = 4 + 6i, z_D = -1 + i \text{ et } z_E = -3 + 3i.$$

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.
2. Déterminer la nature du triangle ABC .
3. Soit f la similitude plane directe telle que $f(A) = D$ et $f(B) = A$.
 - (a) Donner l'écriture complexe de f .
 - (b) Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.
 - (c) Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f .
 - (d) En déduire la nature du triangle DAE .
4. On désigne par (Γ_1) le cercle de diamètre $[AB]$ et par (Γ_2) le cercle de diamètre $[AD]$.

On note M le second point d'intersection du cercle (Γ_1) et de la droite (BC) , et N le second point d'intersection du cercle (Γ_2) et de la droite (AE) .

 - (a) Déterminer l'image de M par la similitude f .
 - (b) En déduire la nature du triangle ΩMN .
 - (c) Montrer que $MB \times NE = MC \times NA$.