

Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation

$$(E) : 16x - 3y = 4.$$

1. Vérifier que le couple $(1; 4)$ est une solution particulière de (E).
2. On admet que l'ensemble des couples de solutions entières de (E) est donné par

$$\{(1 + 3k; 4 + 16k); k \in \mathbb{Z}\}$$

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct .

On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d' affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}} z.$$

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

le point M_0 a pour affixe $z_0 = i$ et pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$.

On note z_n l'affixe du point M_n .

Les points M_0, M_1, M_2 et M_3 sont placés sur la figure ci-contre.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f .
2. On note g la transformation $f \circ f \circ f \circ f$.
 - (a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g .
 - (b) En déduire que pour tout entier naturel n , $OM_{n+4} = 4OM_n$ et que

$$\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}}\right) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$$

où k est un entier relatif.

- (c) Compléter la figure en construisant les points M_4, M_5 et M_6 .
3. Démontrer que pour tout entier naturel n , $z_n = (\sqrt{2})^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$.
4. Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.
 - (a) Exprimer en fonction de n et p une mesure de $\left(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n}\right)$.
 - (b) Démontrer que les points O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8.
5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$. On pourra utiliser la partie A.

