

Exercice 1

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On note z_n la suite de nombres complexes, de terme initiale $z_0 = 0$, et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n + 1, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n .

- Calculer les affixes des points A_1 , A_2 et A_3 . Placer ces points dans le plan muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- Montrer que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une similitude directe s , dont on définira le rapport, l'angle et le centre Ω , d'affixe ω .
 - Démontrer que le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est isocèle rectangle.
- Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $\Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.
 - À partir de quelle valeur de n les points A_n sont-ils situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon 0,001 ?
- Pour tout entier naturel n , on note a_n la longueur $A_n A_{n+1}$ et L_n la somme $\sum_{k=0}^n a_k$.
 L_n est ainsi la longueur de la ligne polygonale $A_0 A_1 \cdots A_n A_{n+1}$.
 Déterminer la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.
- Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
 Démontrer que, pour tout entier naturel n , les points A_n , Ω et A_{n+4} sont alignés.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.

L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

- Quelques résultats
 - Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
 - Montrer que, quel que soit l'entier n , $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
 - Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n .
 - Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:

$$n^8 \equiv 1 \pmod{d}.$$

- Recherche de critères

Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1 \pmod{d}$.

- Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s , montrer que s divise k .
- En déduire que s est un diviseur de 8.

- (c) Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d - 1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.
3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.
Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas $s = 1$, $s = 2$ puis $s = 4$, conclure que p est congru à 1 modulo 8.
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.
Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, ...

Exercice 3

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p , alors $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ».

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

- Calculer les six premiers termes de la suite.
 - Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
 - Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.
- On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n) .
- Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
 - Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.

(a) Montrer que : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.

(b) En déduire que $6u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.

(c) Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?

Exercice 4

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soient A, B deux points du plan d'affixes respectives a et b .

On rappelle que :

* $\left(\vec{u}, \vec{AB}\right) = \arg(b - a) + 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$.

* L'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport $k(k > 0)$ et d'angle θ est le point C défini par :

$$AC = kAB \quad \text{et} \quad \text{si } A \neq B, \quad \left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = \theta + 2n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

Exprimer l'affixe c du point C en fonction de a , b , θ et k .

Partie B

On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 1$.

- (a) Montrer que le couple $(-1 ; -2)$ est une solution de (E).
(b) Déterminer tous les couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E).
- Soient d et d' les droites d'équations respectives $y = 2x + 4$ et $3x - 2y = 1$.
(a) Vérifier que pour tout entier relatif k , le point A_k de coordonnées $(k-3 ; 2k-2)$ appartient à la droite d .
On admettra que ce sont les seuls points de d à coordonnées entières.
(b) Montrer que les seuls points de d' à coordonnées entières sont les points $B_{k'}$ de coordonnées $(2k' - 1 ; 3k' - 2)$ où $k' \in \mathbb{Z}$.
- (a) Existe-t-il deux entiers relatifs k et k' tels que $A_k = B_{k'}$?
(b) Déterminer les entiers relatifs k et k' tels que le segment $[A_k B_{k'}]$ soit parallèle à l'axe des abscisses.
(c) Trouver l'entier q tel que $\overrightarrow{A_{3q} B_{2q}} = 4\vec{u}$.
- Soit Ω un point quelconque du plan dont l'affixe est notée ω . On note H le milieu du segment $[A_6 B_4]$.
On désigne par f la similitude directe de centre Ω , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
(a) Donner l'écriture complexe de la similitude f .
(b) Déterminer l'affixe du point Ω pour que l'image du point H soit l'origine O du repère.

Exercice 5

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2\,009 \pmod{10\,000}$.

Partie A

- Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.
- En déduire que $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \pmod{16}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 2\,009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

- (a) Démontrer que u_0 est divisible par 5.
(b) Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)].$$

- (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n est divisible par 5^{n+1} .
- (a) Vérifier que $u_3 = 2\,009^{250} - 1$ puis en déduire que $2\,009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$.
(b) Démontrer alors que $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \pmod{625}$.

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ est divisible par $10\,000$.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par $2\,009$.

Exercice 6

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E)
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3 \times 2^m = 1$ (F).

1. On suppose $m \leq 4$.
Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geq 5$.
 - (a) Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
 - (b) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
 - (c) En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.
 - (d) Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).