Chapitre :
Similitudes planes directes

∽

Rappels : Fiche de cours et exercices sur les translations, homothéties et rotations.
Notre but : définir des transformations du plan qui généralisent celles vues en première.

Définition Deux triangles sont semblables si les angles de l'un sont égaux au angles de l'autre.

Propriété Deux triangles sont semblables si et seulement si les longueurs des côtés de l'un sont proportionnelles aux longueurs des côtés de l'autres.

⊛ **Activité :** 1p74 (première approche de similitude (composition de rotation et d'homothétie))

I. Transformations du plan

Définition Une transformation T du plan est une application qui à tout point M associe un unique point M' appelé image de M et noté $T(M)$, telle que tout point N du plan est l'image d'un unique point M.
On dit qu'une transformation est une **bijection** du plan.

Propriété Une transformation T admet une transformation **réciproque** notée T^{-1}.
Elle est définie par : $T(M) = N \Leftrightarrow T^{-1}(N) = M$.

Propriété La composée de deux transformations du plan T_1 et T_2 est une transformation.
La transformation de T_1 suivie de T_2 est notée $T_2 \circ T_1$ (attention à la notation !).

Exemple Les translations, rotation, homothéties (de rapport non nul) sont des transformations du plan.
Elles ont quelques propriétés communes que nous avons vues dans le rappel.

▶ **Exercices :** 1p90

II. Similitudes directes

1. Définition géométrique

Définition Un **déplacement** est une transformation qui est soit une rotation, soit une translation, soit l'identité.

Une homothétie (de rapport différent de 1) n'est pas un déplacement.

Définition Une similitude plane directe est la composée (dans n'importe quel ordre) d'un déplacement et d'une homothétie.

On utilisera par la suite le seul mot « similitude » pour désigner une similitude plane directe.

▶ **Exercices :** 8p90
Une similitude étant composée d'une homothétie de rapport k (qui multiplie les longueurs par $|k|$) et d'un déplacement (qui conserve les longueurs), on en déduit que la similitude multiplie les longueurs par $|k|$.
On appelle alors **rapport de la similitude** le nombre par lequel sont multipliées les longueurs.

⚠ le rapport d'une similitude est un nombre **positif** (ce qui n'est pas forcément le cas de l'homothétie) !
Compte tenu des propriétés déjà connues des déplacements et des homothéties, on peut en déduire les propriétés suivantes :

Propriété
- Une similitude transforme un triangle en un triangle semblable.
- Une similitude conserve les rapports de longueur.
- Une similitude conserve les angles orientés.
- La transformation réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.
- La composée de deux similitudes de rapports respectifs k et k' est une similitude de rapport kk'.

2. Caractéristiques

Propriété Soit s une similitude et soit A et B deux points distincts d'images respectives A' et B'. Soit M un point quelconque d'image M'. Alors :

$$(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})[2\pi]$$

L'angle $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{A'M'})$ est appelé **angle de la similitude**).

Preuve : On utilise la relation de Chasles ; modulo 2π on a :

$$(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'M'})$$

Or, une similitude conserve les angles orientés, donc $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'M'})$ sont opposés. On a donc bien

$$(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})$$

□

Propriété Toute similitude qui n'est pas une translation admet un point fixe appelé **centre de la similitude**.

Preuve : Nous prouverons cela plus tard. □

Remarque En particulier, si la similitude n'est pas une translation, soit O son centre. Soit M un point d'image M'. Alors l'angle de la similitude s'exprime sous la forme : $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})$ (comme pour une rotation).

▶ **Exercices :** 5,6,7p90

▶ **Exercices :** 9p90,13p91

3. Propriétés

Propriété Une similitude qui admet deux points fixes distincts est l'identité.

Preuve : Soit s une similitude qui admet A et B pour points fixes. Puisqu'elle admet deux points fixes A et B, son rapport vaut $\dfrac{AB}{AB} = 1$; elle conserve donc les longueurs. Soit M un point situé en dehors de (AB), et $M' = s(M)$. Le triangle ABM a pour image par similitude le triangle semblable ABM'. Or ces deux triangles ont un côté commun et les mêmes longueurs. Par conséquent, $M = M'$.
On prouve ce dernier point plus proprement : si l'on suppose que $M \neq M'$, les égalités $AM = AM'$, $BM = BM'$ nous indiquent que (AB) est la médiatrice de $[MM']$, autrement dit que M' est le symétrique de M par rapport à (AB). Mais alors ABM et ABM' ne sont pas semblables car les angles sont opposés. Ce qui est contradictoire. □
La propriété suivante provient des propriétés des transformations composant une similitude.

Propriété Toute similitude de rapport k $(k > 0)$:
- Multiplie les distances par k ;
- conserve les angles orientés donc le parallélisme et l'orthogonalité ;
- Conserve l'alignement et les intersections ;
- transforme une droite en une droite et un segment en un segment ;
- conserve les barycentres (donc les milieux) ;
- transforme un cercle de centre O et de rayon r en un cercle de centre O' image de O et de rayon kr.

▶ **Exercice :** 52p95

III. Écriture complexe d'une similitude

Théorème **(Propriété caractéristique)** Une transformation s est une similitude directe si et seulement si son écriture complexe est de la forme $z \mapsto az + b$, où a et b sont des nombres complexes ($a \neq 0$).
Le rapport de la similitude est égal à $|a|$, et son angle est $arg(a)$.

Preuve :

- **Sens direct :** Soit s une similitude de rapport k et d'angle θ. On considère un point A fixé et un point $M(z)$ quelconque d'images respectives A' et $M'(z')$ par s. On a alors :
$$A'M' = kAM \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{A'M'}) = \theta$$
.
Soit $Z = \dfrac{z' - z_{A'}}{z - z_A}$. On sait que :
$$|Z| = \frac{A'M'}{AM} = k \qquad \text{et} \qquad arg(Z) = (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{A'M'}) = \theta$$
Donc $Z = ke^{i\theta}$, et :
$$\begin{aligned} & z' - z_{A'} = ke^{i\theta}(z - z_A) \\ \Leftrightarrow \quad & z' = ke^{i\theta}z + \left(z_{A'} - z_A e^{i\theta}\right) \end{aligned}$$
En posant $a = ke^{i\theta}$ et $b = \left(z_{A'} - z_A e^{i\theta}\right)$, on obtient bien $z' = az + b$ et a vérifie bien ce qui est annoncé dans le théorème.
- **Réciproquement,** soit f une application d'écriture géométrique $z' = az + b$, avec $a \neq 0$. f est bien une transformation, car étant donné z', il existe un unique z vérifiant l'égalité $z' = az + b$.
Démontrons que f est la composée d'un déplacement par une homothétie.
Soit $k = |a|$ et $\theta = arg(a)$. Puisque $a \neq 0$, on a $k \neq 0$. Alors $z' = ke^{i\theta}z + b = k\left(e^{i\theta}z + \dfrac{b}{k}\right)$
Deux cas :
  - $\theta \equiv 0\ [2\pi]$: en posant $v = \dfrac{b}{k}$, on a $z' = k(z + v)$. f est alors la composée $h \circ t$ de la translation $t : z \mapsto z + v$ par l'homothétie $h : z \mapsto kz$.
  - $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$: f est la composée $h \circ r$ de la rotation $r : z \mapsto e^{i\theta}z + \dfrac{b}{k}$ par l'homothétie $h : z \mapsto kz$.
  r est bien une rotation car $e^{i\theta} \neq 0$, donc r admet un point fixe d'affixe z_0 et $r : z \mapsto e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$ (à détailler éventuellement).

  On conclut que f est bien la composée d'une translation et d'un déplacement, autrement dit que f est une similitude. $\square$

Remarque Pour le sens direct, on peut aussi considérer les écritures complexes d'un déplacement et d'une homothétie et observer l'écriture complexe de leur composée.

Remarque L'écriture d'une similiture de rapport k et d'angle θ est donc :
$$s : z \mapsto ke^{i\theta}z + b$$
où b est un nombre complexe fixé (ne dépendant pas de z).

On peut maintenant prouver facilement un certain nombre de propriétés :

Propriété
- Toute similitude plane directe, autre qu'une translation, admet un point fixe unique, appelé **centre de la similitude**.
- La composée de deux similitudes de rapports k et k' et d'angles θ et θ' est une similitude de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$.

Preuve :
- La question est de rechercher les points fixes, autrement dit de résoudre l'équation $s(z) = z$ où $s : a \mapsto az + b$, soit $z = az + b$. Or, s est une translation si et seulement si $a = 1$. Ainsi, si s n'est pas une translation, on obtient que $a \neq 1$ et l'équation a pour unique solution $z = \dfrac{b}{1-a}$
- Soit $s : z \mapsto ke^{i\theta}z + b$ et $s' : z \mapsto k'e^{i\theta'}z + b'$. Leur composée donne :

$$\begin{aligned} s \circ s' : z \mapsto \quad & ke^{i\theta}\left(k'e^{i\theta'}z + b'\right) + b \\ & = kk'e^{i(\theta+\theta')}z + \left(ke^{i\theta}b' + b\right) \end{aligned}$$

  Par lecture de cette expression, on observe bien que $s \circ s'$ est une similitude, et que son rapport est kk' et que son angle est $\theta + \theta'$.

□

Propriété Une autre écriture complexe d'une similitude qui n'est pas une translation est :

$$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$$

où k et θ sont respectivement le rapport et l'angle de la similitude.

Preuve : On sait que $z' = ke^{i\theta}z + b$ avec $\theta \neq 0$ (et $ke^{i\theta} \neq 0$). Le point fixe, qui a pour affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ avec $a = ke^{i\theta}$ vérifie l'égalité :

$$\omega = ke^{i\theta}\omega + b$$

En soustrayant terme à terme avec l'écriture complexe de la similitude, on obtient :

$$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$$

(détailler éventuellement) □

Propriété Soit A, B, A' et B' quatre points tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors il existe une unique similitude s transformant A en A' et B en B'.
Il s'ensuit évidemment que : Son rapport est $\dfrac{A'B'}{AB}$ et son angle est $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})$

Preuve : Il s'agit tout simplement de résoudre un système pour trouver a et b. Ce système a une solution unique dans le cas où $A \neq B$ et $A' \neq B'$. □

▶ **Exercices :** 3,4p90

▶ **Exercices :** 14 à 20p91

▶ **Exercices :** 21 à 27p92