Devoir maison n°15 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. Si $x \geq -2$, alors $\dfrac{1}{x} \leq -\dfrac{1}{2}$. **Faux :** Si $x = 1$, on a bien $1 \geq -2$, mais $\dfrac{1}{1} = 1 > -\dfrac{1}{2}$.
2. Si $x \leq -4$, alors $x^2 \geq 16$. **Vrai** (car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$).
3. Si $x \leq 3$, alors $x^2 \leq 9$. **Faux :** Si $x = -4$, alors $-4 \leq 3$, mais $(-4)^2 = 16 > 9$.
4. Si $x \geq -10$, alors $|x| \leq 10$. **Faux :** Si $x = 11$, alors $11 \geq -10$, mais $|11| = 11 > 10$.

Exercice 2 Pour comparer deux nombres, essayer de mettre ces nombres sous la même forme. Comparons :

1. $(1+\sqrt{3})^2$ et 3^2 : On écrit : $3^2 = (1+2)^2 = (1+\sqrt{4})^2$.
   Or $3 < 4$, donc en appliquant la racine carrée (croissante sur $[0; +\infty[$), $\sqrt{3} < \sqrt{4}$. En ajoutant 1, $(1+\sqrt{3}) < (1+\sqrt{4})$. On applique alors la fonction carré (croissante sur $[0; +\infty[$) pour obtenir $(1+\sqrt{3})^2 < (1+\sqrt{4})^2$, soit $(1+\sqrt{3})^2 < 3^2$.
2. $3\sqrt{5}$ et $2\sqrt{11}$: On écrit $3\sqrt{5} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{45}$ et $2\sqrt{11} = \sqrt{4 \times 11} = \sqrt{44}$.
   Or, $45 > 44$, donc en appliquant la raciné carrée (croissante sur $[0; +\infty[$), on obtient $\sqrt{45} > \sqrt{44}$, soit $3\sqrt{5} > 2\sqrt{11}$.
3. $\left(\dfrac{1}{11}\right)^2$ et $0,01$: On écrit $0,01 = \dfrac{1}{100} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^2$.
   Or, $11 > 10$, donc en appliquant la fonction inverse (décroissante sur $]0; +\infty[$), on obtient $\dfrac{1}{11} < \dfrac{1}{10}$. On applique alors la fonction carrée (croissante sur $[0; +\infty[$) pour obtenir l'inégalité $\left(\dfrac{1}{11}\right)^2 < \left(\dfrac{1}{10}\right)^2$, soit $\left(\dfrac{1}{11}\right)^2 < 0,01$.

Exercice 3 La valeur de $\sin\left(\dfrac{180\pi}{180+\pi}\right)$ est environ $0,053864487$, que la calculatrice soit réglée pour des angles en degré ou en radian. Au lieu de simplement le vérifier « par hasard », cherchons à résoudre le problème suivant :

> Quels sont les angles ayant le même sinus qu'ils soient considérés en degré ou en radian ?

Autrement dit, on cherche à résoudre l'équation (E) $\sin(x) = \sin(x^\circ)$.
Nous connaissons mieux la fonction sinus avec des radians, on convertit donc x° en radians :

$$x^\circ = x \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi x}{180}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi x}{180} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi x}{180} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad \dots \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 + \frac{360\pi}{180-\pi}k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = \frac{180\pi}{180+\pi} + \frac{360\pi}{180+\pi}k, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Si on ne recherche que les solutions sur $[0;\pi]$ (pour la conversion radian $\leftrightarrow$ degré),
on remarque qu'il n'y a que deux solutions : $x = 0$ ($0^\circ = 0$ radian !) et $x = \dfrac{180\pi}{180+\pi}$.
Ainsi, nous venons bien de prouver, en particulier, que :

$$\sin\left(\frac{180\pi}{180+\pi}\right) = \sin\left(\left(\frac{180\pi}{180+\pi}\right)^\circ\right)$$

On remarquera cependant que les deux angles $\dfrac{180\pi}{180+\pi}$ et $\left(\dfrac{180\pi}{180+\pi}\right)^\circ$ ne sont pas les mêmes.
Ramenés tous deux à la même unité, ils sont supplémentaires (leur somme vaut π ou 180°).

Pour le cosinus, la question ne se pose pas vraiment : il n'y a pas de solution non nulle sur $[0;\pi]$.