

Devoir maison n°17 – mathématiques  
Donné le 24/04/2012 – à rendre le 04/05/2012

**Exercice 1** On considère la fonction  $f$  suivante :

$$f : x \longmapsto -\frac{1}{x} + x^2$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

Le but de cet exercice est de tracer le mieux possible  $\mathcal{C}_f$  sur  $]0; 6]$ .

1. Justifier que  $f$  est définie sur  $]0; 6]$ .
2. Démontrer que  $f$  est strictement croissante sur  $]0; 6]$ .
3. On souhaite résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .
  - (a) Vérifier l'égalité (E) suivante :  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ .
  - (b) Résoudre alors l'équation  $f(x) = 0$  en utilisant l'égalité (E).
4. Soit  $a \in ]0; 6]$ . Démontrer que  $f$  est dérivable en  $a$  et que :

$$f'(a) = \frac{1}{a^2} + 2a$$

5. Déterminer l'équation de la droite  $T_1$ , tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1.
6. On souhaite étudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $T_1$ .
  - (a) En utilisant à nouveau l'égalité (E), démontrer que

$$f(x) - 3(x - 1) = \frac{(x - 1)^3}{x}$$

- (b) Étudier alors le signe de  $f(x) - 3(x - 1)$  sur  $]0; 6]$ .
  - (c) En déduire la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et de  $T_1$  sur  $]0; 6]$ .
7. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

$x$	0,2	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							

8. Faire un repère avec les caractéristiques suivantes :
  - abscisses de 0 à 6 avec une échelle de 3 carreaux pour 1 unité ;
  - ordonnées de  $-20$  à  $40$  avec une échelle de 3 carreaux pour 10 unités.
9. Tracer  $T_1$ , et ensuite  $\mathcal{C}_f$ .

**Exercice 2 (Pour la culture générale !)**

Représentation « en escalier » (ou en escargot) d'une suite définie par récurrence.  
Voir à ce propos le fichier disponible dans le groupe de travail sur PLACE.  
Représenter sous cette forme les six premiers termes de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{10}u_n^2 + u_n + 7,5 =: f(u_n) \end{cases}$$

On apportera un soin particulier au tracé de la courbe d'équation  $y = f(x)$  sur  $[0; 10]$ .