

Devoir maison n°18 – mathématiques
Donné le 04/05/2012 – à rendre le 11/05/2012

Exercice 1 On rappelle que quand une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$ ($0 \leq p \leq 1$), on a la loi suivante :

$$P(X = 0) = (1 - p)^2 \quad P(X = 1) = 2p(1 - p) \quad P(X = 2) = p^2$$

Cet exercice a pour but de répondre à la question suivante :

Indiquer en fonction de p la valeur k pour laquelle $P(X = k)$ est la plus grande.

Pour cela, on va étudier le signe de chacune des fonctions suivantes, définies sur $[0; 1]$:

$D_{01} : p \mapsto P(X = 0) - P(X = 1)$, $D_{20} : p \mapsto P(X = 2) - P(X = 0)$ et $D_{21} : p \mapsto P(X = 2) - P(X = 1)$

1. Soit $p \in [0; 1]$.
 - (a) Expliquer pourquoi, si $D_{01}(p) > 0$, connaître le signe de $D_{20}(p)$ permet de déterminer k . Donner alors cette valeur en fonction du signe de $D_{20}(p)$.
 - (b) Expliquer de même pourquoi, si $D_{01}(p) < 0$, connaître le signe de $D_{21}(p)$ permet de déterminer k . Donner alors cette valeur en fonction du signe de $D_{21}(p)$.
2. Déterminer l'intervalle solution I de l'inéquation $D_{01}(p) > 0$ sur $[0; 1]$.
On peut, comme par la suite, éviter de calculer Δ !
3. Déterminer le signe de D_{20} sur I , et en déduire la valeur de k lorsque p varie dans I .
4. Déterminer le signe de D_{21} sur l'intervalle J restant, et en déduire la valeur de k lorsque p varie dans J .
5. Résumer dans un tableau la valeur de k en fonction de p .
Existe-t-il des valeurs de p où il n'y a pas qu'une seule valeur de k ?

Exercice 2 (Énigme) Dix sacs ouverts de 100 pièces d'or sont alignés devant vous. Il y a un sac de fausses pièces. Une vraie pièce pèse 5 grammes et une fausse 4,5 grammes. Seul le poids permet de les distinguer. On dispose d'une balance numérique, qui donne donc un poids exact en grammes. Comment déterminer le sac de fausses pièces en une seule pesée ? Autrement dit, que doit-on mettre sur la balance avant de commencer la pesée, et comment savoir quel est le sac après avoir lu le poids ?