LYCÉE ALFRED KASTLER **1S**

2011–2012

Devoir maison n°19 – mathématiques

Correction

Tous les exercices de lieux géométrique se font en **deux temps**, comme expliqué dans l'énoncé.

Exercice 1

1. (a) Puisque H est le projeté orthogonal de M sur (AB), les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. De plus, $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AB} = 25$. Par suite, le produit scalaire étant positif, $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens.
   (b) D'après la question précédente, on peut donc écrire : $BH \times AB = 25$. Comme $AB = 5$, on a donc $BH = 5$.
   (c) Comme $AB = BH$ et comme $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens, on peut donc écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BH}$. Autrement dit, H est le symétrique de A par rapport à B.
2. Soit M un point de la droite perpendiculaire à (AB) passant par H. Alors
$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} = AB^2 = 5^2 = 25$$
   Le point M satisfait bien l'équation.
3. L'ensemble des points M qui satisfont (E) est (toute) la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point H défini par $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB}$.
   On n'oublie pas de faire la figure demandée !

Exercice 2

1. Soit M un point qui satisfait l'égalité. On considère le point H, projeté orthogonal de M sur (AB). Alors $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -10$. Comme le produit scalaire est négatif, on peut affirmer que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$, qui sont colinéaires, sont de sens contraire.
   Ainsi, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -AH \times AB = -10$, et comme $AB = 5$, on obtient $AH = 2$.
   Par suite, $AH = \frac{2}{5}AB$ et comme les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire, $\overrightarrow{AH} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.
2. Réciproquement, on définit le point H tel que $\overrightarrow{AH} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.
   Quelque soit M appartenant à la droite perpendiculaire à (AB) passant par H,
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{5}AB^2 = -10$$
   M satisfait l'égalité.
3. L'ensemble des points M qui satisfont l'égalité (E) est donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point H défini par $\overrightarrow{AH} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.
   On n'oublie pas de faire la figure demandée !

Exercice 3

1. Si M satisfait (E), alors $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$. Autrement dit, ABM est rectangle en M. Cela signifie que M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ (théorème de collège).

   Réciproquement, soit M un point du cercle de diamètre $[AB]$. Si M est différent de A ou B, alors AMB est rectangle en M, et par suite M satisfait (E). Si M est le point A (resp. B), alors $\overrightarrow{AM}$ (resp. $\overrightarrow{BM}$) est le vecteur nul, et (E) est satisfaite.

   Donc l'ensemble des points M qui satisfont (E) est le cercle de diamètre $[AB]$.

2. Avec les coordonnées données, $\overrightarrow{AM}(x+R;y)$ et $\overrightarrow{BM}(x-R;y)$, donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (x-R)(x+R)+y^2 = x^2-R^2+y^2$.

   Ainsi, (E) équivaut à $x^2-R^2+y^2=0$, soit $x^2+y^2=R^2$, c'est à dire l'égalité $(\mathscr{C})$.

   D'après la question précédente, $(\mathscr{C})$ est donc l'équation du cercle de diamètre $[AB]$, plus précisément ici de centre O (milieu de $[AB]$) et de rayon R (longueur $OA = OB$).

Exercice 4 La fonction f est définie par $f : x \mapsto \dfrac{5x-7}{-2x^2-3x+9}$.
Ainsi, f est définie pour tout x tel que $-2x^2-3x+9 \neq 0$.
On cherche donc les racines de $-2x^2-3x+9$. On calcule $\Delta = 9^2 > 0$, puis on détermine les deux racines $x_1 = -3$ et $x_2 = \dfrac{3}{2}$.
Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-3; -\dfrac{3}{2}\right\}$.
Pour calculer f', on observe que f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 5x-7$ et $v(x) = -2x^2-3x+9$.
On a donc $u'(x) = 5$ et $v'(x) = -4x-3$. Par suite, $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$,
donc

$$f'(x) = \frac{5(-2x^2-3x+9)-(5x-7)(-4x-3)}{(-2x^3-3x+9)^2} = \cdots = \frac{10x^2-28x+24}{(-2x^3-3x+9)^2}$$

(attention aux signes en développant le numérateur).
Pour étudier le signe de $f'(x)$, on observe que le dénominateur est un carré, donc que $f'(x)$ est du signe du numérateur. Ce dernier est une expression polynomiale de degré 2. Pour étudier son signe, on recherche d'éventuelles racines. Or $\Delta = 28^2 - 40 \times 24 < 0$, donc il n'y a aucune racine et l'expression a toujours le signe de $a = 10$, donc est toujours positive.
Finalement, $f'(x)$ est toujours positive sur $\mathcal{D}_f$.