LYCÉE ALFRED KASTLER **1S**
2011–2012

Devoir maison n°20 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 3x + 6$ et $v(x) = x - 2$. On a alors $u'(x) = 2x - 3$ et $v'(x) = 1$ puis $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, donc

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-2) - (x^2 - 3x + 6) \times 1}{(x-2)^2} = \cdots = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

Comme $(x-2)^2$ est un carré, il est positif. Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 4x = x(x-4)$, qui est une expression polynomiale de degré 2 avec $a = 1 > 0$ et deux racines, 0 et 4.
On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

2. Grâce à la question précédente et deux calculs on obtient :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
f		$\nearrow$	-3	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	5	$\nearrow$	

3. On a :

$$ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2) + c}{x-2} = \cdots = \frac{ax^2 + (-2a+b)x + (-2b+c)}{x-2}$$

Et on veut $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$. Donc par identification des coefficients polynomiaux :

$$\begin{cases} 1 &= a \\ -3 &= -2a + b \\ 6 &= -2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -1 \\ c &= 4 \end{cases}$$

Donc $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-2}$.

4. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{4}{x-2}$ est de la forme $4 \times \dfrac{1}{v}$ avec v la fonction définie précédemment. On a alors $g' = 4 \times \left(-\dfrac{v'}{v^2}\right)$, et par suite

$$f'(x) = 1 + 4 \times \left(\frac{-1}{(x-2)^2}\right) = \frac{(x-2)^2 - 4}{(x-2)^2} = \frac{(x^2 - 4x + 4) - 4}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

On retrouve bien la même expression de f'.

Exercice 2

À cause de la racine carrée, h est définie sur $[0;+\infty[$. Elle est dérivable sur $]0;+\infty[$, et

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Comme $2\sqrt{x} > 0$ sur $]0;+\infty[$, $h'(x)$ est du signe de $1-2\sqrt{x}$. Or :

$$\begin{aligned} 1-2\sqrt{x} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{4} \quad \text{(la fonction carrée est croissante sur } [0;+\infty[\text{ et } x>0) \end{aligned}$$

On obtient alors le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$h'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
h	2	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	

Exercice 3

1. $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{2}{3}(u_0+1) = \frac{2}{3}(1+1) = \frac{4}{3}$ et $u_2 = \frac{2}{3}(u_1+1) = \frac{2}{3}(\frac{4}{3}+1) = \frac{14}{9}$
2. $u_1 - u_0 = \frac{1}{3}$, mais $u_2 - u_1 = \frac{2}{9}$. Les deux valeurs étant différentes, u n'est pas arithmétique.
   $\dfrac{u_1}{u_0} = \frac{4}{3}$, mais $\dfrac{u_2}{u_1} = \frac{7}{6}$. Les deux valeurs étant différentes, u n'est pas géométrique.
   En fait, u a la forme d'une suite dite arithmético-géométrique.
3. $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$, $v_1 = u_1 - 2 = \frac{4}{3} - 2 = \frac{-2}{3}$ et $v_2 = u_2 - 2 = \frac{14}{9} - 2 = \frac{-4}{9}$.
4. $v_1 - v_0 = \frac{1}{3}$, mais $v_2 - v_1 = \frac{2}{9}$. Les deux valeurs étant différentes, v n'est pas arithmétique.
   Par contre, v est géométrique, et montrer que deux rapports successifs sont égaux ne suffit pas à le prouver.
   On exprime donc :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}-2}{u_n-2} \\ &= \frac{\frac{2}{3}(u_n+1)-2}{u_n-2} \quad \text{(on ne remplace que } u_{n+1} \text{ en fonction de } u_n) \\ &= \frac{\frac{2}{3}((u_n+1)-3)}{u_n-2} \quad \text{(factorisation par } \frac{2}{3}\text{, coefficient de } u_n\text{, au numérateur)} \\ &= \frac{\frac{2}{3}(u_n-2)}{u_n-2} \\ &= \frac{2}{3} \quad \text{(simplification par } (u_n-2)) \end{aligned}$$

   Le rapport étant constant, égal à $\frac{2}{3}$, la suite v est géométrique, de rapport $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = -1$.
5. Par suite, $v_n = v_0 q^n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
6. Quelque soit n entier naturel, $v_n = u_n - 2$, donc $u_n = v_n + 2 = 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   Finalement, $u_{50} = 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{50}$ (effectivement très proche de 2).