LYCÉE ALFRED KASTLER **1S**
2011–2012

Devoir surveillé n°01 – mathématiques
Correction

Exercice 1

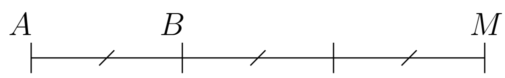
1.
$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MB} \end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires. M étant commun, on en déduit que M, A et B sont alignés.

2. Pour placer le point M de manière simple, on cherche à obtenir une égalité vectorielle où M apparaît comme extrémité d'un seul vecteur. On reprend alors :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} \qquad \text{(Chasles)} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow -\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow -\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

On obtient alors une figure facilement réalisable une fois A et B choisis :



3. C étant sur l'axe des ordonnées, on sait que $x_C = 0$.
De plus, comme $C \in (AB)$, on sait que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Or :

$$\begin{array}{lcl} \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) & & \overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A) \\ \overrightarrow{AB}(-2-3; 5-(-2)) & \text{et} & \overrightarrow{AC}(0-3; y_C - (-2)) \\ \overrightarrow{AB}(-5; 7) & & \overrightarrow{AC}(-3; y_C + 2) \end{array}$$

Par suite, la condition de colinéarité ($xy' - x'y = 0$) nous donne l'équation suivante :

$$-5(y_C + 2) - (-3) \times 7 = 0 \Leftrightarrow -5y_C - 10 + 21 = 0 \Leftrightarrow -5y_C = -11 \Leftrightarrow y_C = \frac{11}{5}$$

Ainsi, C a pour coordonnées $\left(0; \dfrac{11}{5}\right)$.

Exercice 2

1. On lit graphiquement les coordonnées de deux points de d_1 : $A'(-3;0)$ et $B(1;3)$.
   On recherche une équation de droite dont on connaît deux points distincts.
   Déterminons pour cela les coordonnées du vecteur directeur $\overrightarrow{A'B}$: $\overrightarrow{A'B}(1+3;3-0)$ soit $\overrightarrow{A'B}(4;3)$.
   d_1 a une équation de la forme $ax+by+c=0$, avec $\overrightarrow{A'B}(-b;a)$, donc $-3x+4y+c=0$.
   Pour déterminer c on utilise le fait que $A' \in d_1$:
   $$-3\times(-3)+5\times 0+c=0 \Leftrightarrow 9+c=0 \Leftrightarrow c=-9$$
   Ainsi :
   $$d_1 : -3x+4y-9=0$$
2. L'équation $2x+3y+2=0$ est une équation de droite. Pour justifier que c'est bien une équation de d_2, on peut :
   - Rechercher l'équation et trouver la même ;
   - Déterminer deux points de d_2 et vérifier que leurs coordonnées satisfont l'équation donnée ;
   - Déterminer un point et un vecteur directeur de d_2 et vérifier que cela correspond à l'équation donnée.

   Je choisis la seconde méthode. On observe que $C(-4;2)$ et $D(2;-2)$ appartiennent à d_2.
   – Pour C, $2x+3y+2=2\times(-4)+3\times 2+2=-8+6+2=0$;
   – Pour D, $2x+3y+2=2\times 2+3\times(-2)+2=4-6+2=0$.
   Ainsi, C et D sont deux points de la droite d'équation $2x+3y+2=0$. Autrement dit, la droite d'équation $2x+3y+2=0$ est $(CD)=d_2$; d_2 a pour équation $2x+3y+2=0$.
3. On peut déterminer graphiquement un vecteur directeur de d_2. Par exemple, $\overrightarrow{u}(3;-2)$ (qui est égal à $\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$). La droite d_3 est parallèle à d_2, elle a donc la même direction que d_2, donc admet $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur. Par suite son équation est de la forme $2x+3y+c'=0$. Or, le point $A(7;-1)$ appartient à d_3 par définition. Donc :
   $$2\times 7+3\times(-1)+c'=0 \Leftrightarrow 14-3+c'=0 \Leftrightarrow c'=-11$$
   Finalement :
   $$d_3 : 2x+3y-11=0$$
4. Le point d'intersection entre d_1 et d_3 est le point dont les coordonnées $(x;y)$ satisfont les équations de d_1 et de d_3. On résout alors le système suivant :
   $$\begin{aligned}
   \begin{cases} -3x+4y-9=0 \\ 2x+3y-11=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -6x+8y-18=0 & \leftarrow L_1\times 2 \\ 6x+9y-33=0 & \leftarrow L_2\times 3 \end{cases} \\
   &\Leftrightarrow \begin{cases} 17y-51=0 & \leftarrow L_1+L_2 \\ 6x+9y-33=0 \end{cases} \\
   &\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{51}{17}=3 \\ 6x+9\times 3-33=0 & \text{(substitution)} \end{cases} \\
   &\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{51}{17}=3 \\ x=\dfrac{-27+33}{6}=\dfrac{6}{6}=1 \end{cases}
   \end{aligned}$$
   Ainsi, l'intersection entre d_1 et d_3 est le point $B(1;3)$.

Exercice 3

1. f est une fonction polynomiale de degré 2, avec $a = 5$, $b = -20$ et $c = -25$. Sa courbe représentative est une parabole, dont les branches sont orientées vers le haut car $a > 0$.

   Le minimum est atteint en $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-20}{2 \times 5} = \dfrac{20}{10} = 2$.

   La valeur du minimum est $f(2) = 5 \times 2^2 - 20 \times 2 - 25 = 5 \times 4 - 40 - 25 = 20 - 65 = -45$.

   On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-45	$\nearrow$	

2. L'expression donnée est la forme canonique de $f(x)$. On peut donc la chercher et voir que c'est bien cela. On peut aussi partir de la forme donnée et retrouver $f(x)$:

$$\begin{aligned}
5\left((x-2)^2 - 9\right) &= 5\left(x^2 - 4x + 2^2 - 9\right) \\
&= 5(x^2 - 4x + 4 - 9) \\
&= 5(x^2 - 4x - 5) \\
&= 5x^2 - 20x - 25 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
f(x) = 5\left((x-2)^2 - 9\right) &= 5\left((x-2)^2 - 3^2\right) \\
&= 5(x - 2 - 3)(x - 2 + 3) \\
&= 5(x-5)(x+1)
\end{aligned}$$

   Ainsi, $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5(x-5)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0$ ou $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -1$.

   Les racines de f sont 5 et -1.