Devoir surveillé n°05 – mathématiques
06/03/2012

Exercice 1 (8 points) Armand fait un exercice de devoir. Il s'agit d'un QCM composé de trois questions. Chaque question ne possède qu'une seule bonne réponse, parmi quatre propositions. Armand décide de répondre au hasard à chacune des questions, en traitant les questions indépendamment. On considère la variable aléatoire X désignant le nombre de bonnes réponses obtenues.

1. Quelle loi suit la variable X ? Détailler la rédaction.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré, puis donner la loi de X sous forme d'un tableau.
3. Calculer l'espérance de X, ainsi que la variance de X.
4. Une bonne réponse à une question rapporte un point. Une mauvaise réponse à une question fait perdre m points ($m \geq 0$). On note Y la variable aléatoire désignant le nombre de points obtenus à l'exercice.
   (a) Exprimer Y en fonction de X (et de m).
   (b) Déterminer m de sorte que l'espérance du nombre de points d'un élève répondant au hasard aux questions de cet exercice soit nulle.

Exercice 2 (6 points) Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f suivante puis les variations de f sur $\mathcal{D}_f$, en justifiant proprement.
$$f \ : \ x \longmapsto 2\sqrt{6x - x^2 - 8}$$
2. Le professeur a demandé de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1}{x} \leq 2$.
   Auguste a rédigé le texte ci-dessous :

La fonction inverse est décroissante, donc $\dfrac{1}{x} \leq 2$ équivaut à $x \geq \dfrac{1}{2}$. Donc l'ensemble des solutions est $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

   Le professeur lui fait la remarque qu'il manque un argument, et qu'il oublie des solutions. Comment corriger cette rédaction ?
3. Démontrer que la fonction $h : x \mapsto -x + 2 - x^2 + \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice 3 (6 points) Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$ **puis** sur $]-\pi; \pi]$: $6 + 4\sqrt{3}\cos(x) = 0$.
2. Soit x le réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = -\dfrac{5}{6}$.
   (a) Calculer la valeur exacte de $\cos(x)$.
   (b) Donner une valeur approchée de x à 10^{-2} près (en radians) en indiquant la méthode.