Devoir surveillé n°06 – mathématiques
Correction

Exercice 1 On nous donne les deux fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 3x^2+5 \qquad g : x \mapsto \frac{3}{x-2}$$

1. f est une fonction polynomiale de degré 2, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   g n'est définie que si $x-2 \neq 0$, autrement dit si $x \neq 2$, donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. Soit a un réel quelconque de $\mathcal{D}_f$. Alors :
   $$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{3(a+h)^2+5-(3a^2+5)}{h} = \frac{3(a^2+2ah+h^2)+5-3a^2-5}{h}\\ &= \frac{3a^2+6ah+3h^2-3a^2}{h} = \frac{6ah+3h^2}{h} = 6a+3h.\end{aligned}$$
   Par suite,
   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} 6a+3h = 6a \in \mathbb{R}$$
   Par conséquent, f est dérivable en a et $f'(a) = 6a$.

   Soit a un réel quelconque de $\mathcal{D}_g$. Alors :
   $$\begin{aligned}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} &= \frac{\dfrac{3}{(a+h)-2} - \dfrac{3}{a-2}}{h} = \frac{\dfrac{3(a-2)}{(a+h-2)(a-2)} - \dfrac{3(a+h-2)}{(a+h-2)(a-2)}}{h}\\ &= \frac{\dfrac{3(a-2)-3(a+h-2)}{(a+h-2)(a-2)}}{h} = \frac{\dfrac{3a-6-3a-3h+6}{(a+h-2)(a-2)}}{h} = \frac{\dfrac{-3h}{(a+h-2)(a-2)}}{h}\\ &= \frac{-3h}{(a+h-2)(a-2)} \times \frac{1}{h} = \frac{-3}{(a+h-2)(a-2)}.\end{aligned}$$
   Par suite,
   $$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(a+h-2)(a-2)} = \frac{-3}{(a-2)^2} \in \mathbb{R} \qquad (a \neq 2)$$
   Par conséquent, g est dérivable en a et $g'(a) = \dfrac{-3}{(a-2)^2}$.
3. L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3 est donnée par :
   $$y = f'(3)(x-3)+f(3)$$
   Or $f(3) = 3\times 3^2+5 = 32$ et $f'(3) = 6\times 3 = 18$ (on utilise la question précédente avec $a = 3$!)
   L'équation est alors $y = 18(x-3)+32$, soit $y = 18x-22$.

   L'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 3 est donnée par :
   $$y = g'(3)(x-3)+g(3)$$
   Or $g(3) = \dfrac{3}{3-2} = 3$ et $g'(3) = \dfrac{-3}{(3-2)^2} = -3$. L'équation est alors $y = -3(x-3)+3$, soit $y = -3x+12$.

Exercice 2

1. On utilise les identités remarquables (sans écrire de choses qui n'ont pas de sens) :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2+\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2+\|\overrightarrow{u}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2+\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2\\ &= 2\|\overrightarrow{u}\|^2+2\|\overrightarrow{v}\|^2\\ &= 2\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2\right)\end{aligned}$$

2. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AD=3$, $AB=5$ et $AC=7$. On veut déterminer la longueur BD (qui est aussi DB). On pose $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AD}$.
   Alors $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ d'après la règle du parallélogramme.
   De plus, $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$ d'après la relation de Chasles.
   L'égalité démontrée en 1. revient alors à : $\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{DB}^2=2(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2)$.
   Autrement dit, $AC^2+DB^2=2(AB^2+AD^2)$ (égalité toujours vraie dans un parallélogramme $ABCD$!). En remplaçant les trois valeurs données dans l'énoncé, on obtient

$$\begin{aligned}7^2+DB^2=2(5^2+3^2) &\Leftrightarrow DB^2=2(25+9)-49\\ &\Leftrightarrow DB^2=2\times 34-49=68-49=19\\ &\Leftrightarrow DB=\sqrt{19}\end{aligned}$$

Exercice 3

1. La suite u est définie pour $n\geqslant 1$ par $u_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
   (a) Le premier terme est donc $u_1=\dfrac{1}{2}$, et le deuxième terme est $u_2=\dfrac{1}{4}$.
   (b) La seule méthode possible est l'étude du signe de $u_{n+1}-u_n$. Or
   $$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}-1\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(-\frac{1}{2}\right)<0\end{aligned}$$
   Par conséquent, u est décroissante.
2. La suite v est définie pour $n\geqslant 0$ par : $\left\{\begin{array}{lcl} v_0 &=& -1\\ v_{n+1} &=& v_n^2+5v_n+4, \quad n\geqslant 0\end{array}\right.$
   (a) Le premier terme est $v_0=-1$.
   Le second est $v_1=v_0^2+5v_0+4=(-1)^2+5\times(-1)+4=1-5+4=0$.
   Le troisième est $v_2=v_1^2+5v_1+4=0^2+5\times 0+4=4$.
   (b) $v_{n+1}-v_n=v_n^2+5v_n+4-v_n=v_n^2+4v_n+4$.
   (c) On observe une expression polynomiale de degré 2 en v_n, et même une identité remarquable :
   $$v_{n+1}-v_n=v_n^2+4v_n+4=(v_n+2)^2\geq 0 \qquad \text{(c'est un carré !)}$$
   Donc v est croissante (en fait ici strictement, mais on n'a pas les outils nécessaires pour le démontrer en première).
   (d) (Bonus)

<u>Variables</u> n (un entier naturel) v (un entier relatif) i (un entier naturel) <u>Initialisation</u> v prend la valeur -1 (*c'est la valeur du premier terme* v_0) Saisir n (*la valeur du rang duquel on veut connaître le terme*) <u>Traitement</u> Pour i allant de 1 à n Faire   │ v prend la valeur v²+5v+4 (v *prend la valeur du terme de rang* i) Fin Pour <u>Sortie</u> Afficher v

<u>Remarque</u> Si la valeur de n donnée est 0 (ou moins), on n'entre pas dans la boucle 'Pour' (car i est déjà supérieur à n). Et donc c'est bien la valeur $v_0 = -1$ qui est affichée. On peut estimer que c'est un problème que n soit négatif. Dans ce cas, il faut ajouter une conditionnelle 'Si' qui englobe le traitement.