Devoir surveillé n°07 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} =^{(\star)} -AB\times CA = -cb$ $\quad {}^{(\star)}$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont colinéaires de même sens.

   (b) On utilise la première définition du cours (en <u>réduisant</u> la somme vectorielle !) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2)\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2) \quad \text{(Chasles)}\\ &= \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2)\\ &= \frac{1}{2}(b^2 - c^2 - a^2)\end{aligned}$$

   (c) On utilise la relation de Chasles pour pouvoir utiliser le seul angle connu, puis la définition avec les angles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) \quad \text{(Chasles)}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} \quad \text{(par linéarité)}\\ &= AB^2 + AB\times BC\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})\\ &= c^2 + ca\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= c^2 + ca\times\frac{1}{2}\\ &= c\left(c+\frac{a}{2}\right)\end{aligned}$$

   (d) On utilise la projection orthogonale :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BC} \quad \text{(car } H \text{ est le projeté orthogonal de } A \text{ sur } (BC))\\ &= HC\times BC \quad \text{(car les deux vecteurs sont colinéaires de même sens)}\\ &= \frac{a}{2}\times a \quad \text{(car } b=c\text{, donc } A \text{ est isocèle en } A \text{ et } H \text{ est le milieu de } BC)\\ &= \frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

2. On détermine les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:
   $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$, soit $\overrightarrow{AB}(-2;-1)$ puis de même $\overrightarrow{AC}(0;-1)$
   On utilise alors la formule analytique du produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -2\times0+(-1)\times(-1)=1$.
   Comme le produit scalaire est positif, d'après la formule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$, le produit scalaire a le signe du cosinus de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ et est ici positif : l'angle est aigu.

Exercice 2 On rappelle que $X\sim\mathscr{B}(57;0{,}06)$. Ainsi, d'après les formules du cours et la calculatrice :

1. $P(X=2)=\binom{57}{2}\times0{,}06^2\times(1-0{,}06)^{57-2} = 1596\times0{,}0036\times0{,}94^{55}\simeq 0{,}1911469$ est la probabilité qu'exactement deux ascenseurs tombent en panne un jour donné.

2.

$$\begin{array}{rcl}P(X<2) & = & P(X \leqslant 1) \\ & = & P(X=0)+P(X=1) \\ & = & \binom{57}{0} \times 0{,}06^0 \times 0{,}94^{57} + \binom{57}{1} \times 0{,}06^1 \times 0{,}94^{56} \\ & = & 1 \times 1 \times 0{,}94^{57} + 57 \times 0{,}06 \times 0{,}94^{56} \\ & \simeq & 0{,}029396 + 0.106951 \simeq 0{,}136347\end{array}$$

$P(X<2)$ est la probabilité qu'au plus un ascenseur tombe en panne un jour donné.

3. $E(X) = n \times p = 57 \times 0{,}06 = 3{,}42$ est le nombre moyen d'ascenseurs qui tombent en panne chaque jour.

Cela dit, on peut quand même estimer que la probabilité qu'un ascenseur tombe en panne un jour donné donnée (0,06) est quand même trop élevée et donc non réaliste (un ascenseur serait hors service environ 22 jours par ans).

Exercice 3 On a $f : x \longmapsto x + \dfrac{9}{x-2}$.

1. $f(x)$ n'est définie que si $x-2 \neq 0$, autrement dit si $x \neq 2$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$. g est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = x-2$, et $u'(x) = 1$.

   Par suite, $g' = \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, donc $g'(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

   Finalement par somme et produit par des constantes, $f'(x) = 1 - \dfrac{9}{(x-2)^2}$.
3. On a :

$$\begin{array}{rcl}f'(x) & = & 1 - \dfrac{9}{(x-2)^2} \\ & = & \dfrac{(x-2)^2-9}{x-2)^2} \\ & = & \dfrac{(x-2-3)(x-2+3)}{(x-2)^2} \quad \text{(on reconnaît une forme } a^2-b^2 \text{ avec } b=3) \\ & = & \dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}\end{array}$$

4. Le dénominateur étant un carré, il est toujours positif. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $(x-5)(x+1)$, dont les racines sont 5 et -1. Par ailleurs, cette expression est polynomiale de degré 2 avec $a=1$ (il suffit de développer pour le voir). Comme a est positif, $f'(x)$ est donc positive sur $]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[$ (l'extérieur des racines) et négative sur $[-1;2[\cup]2;5]$ (l'intérieur des racines, sans oublier que 2 est une valeur interdite).