Chapitre :
Vecteurs

∽

I. Rappels

⊛ **Activité :** 1p140

1. Définitions

Définition Lorsque A et B sont deux points du plan distincts,
- La **direction** de $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB) ;
- Le **sens** de $\overrightarrow{AB}$ est le sens de A vers B ;
- La **norme** (ou longueur) de $\overrightarrow{AB}$ est la longueur du segment $[AB]$. On note $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Lorsque $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$.
On utilise souvent une simple lettre minuscule pour désigner un vecteur, comme $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$...
Pour tout point O du plan et pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point A tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$.

⚠ un vecteur ne dépend pas d'une origine. On peut le représenter physiquement à plusieurs endroits (en utilisant des points du plan), mais c'est **le même** quel que soit le point origine choisi.

Propriété Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ deux vecteurs du plan. On a alors :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.
Dans le cas où les quatres points sont alignés, il s'agit d'un parallélogramme applati.

Définition La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est un vecteur $\overrightarrow{w}$, de sorte que si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, alors

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

On appelle cette égalité la **relation de Chasles**.

Les propriétés et définitions de la page 142, déjà vues en seconde, sont à connaître, ainsi que la formule de la norme d'un vecteur :

Propriété Dans le plan muni d'un repère, soit $\overrightarrow{u}(x; y)$ un vecteur. Soit A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Alors :

$$\|\overrightarrow{u}\| = AB = \sqrt{x^2 + y^2}$$

▶ **Exercices :** 4,6,7p148

▶ **Exercices :** 19,21,22,26,30p149

II. Colinéarité

⊛ **Activité :** 2p140

Définition Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qui ont la même direction sont dits **colinéaires**.
Dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$
Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est considéré colinéaire à tout autre vecteur ($k = 0$).

Dessin

Remarque Pour prouver que trois points A, B et C sont alignés, il suffit de chercher à démontrer par exemple que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété Dans un plan muni d'un repère, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$. Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$xy' - x'y = 0$$

Preuve : Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, alors c'est vrai. Sinon, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$. On a donc : $x = kx'$ et $y = ky'$. Ainsi, $xy' - x'y = kx'y' - x'ky' = 0$. □

▶ **Exercices :** 65,67,68,69,71p151
Programme : exercice 66p151, 77p151

▶ **Exercices :** 79,83,89p152

III. Équation cartésienne d'une droite

⊛ **Activité :** 4p141

1. Rappels

Définition On appelle **vecteur directeur** d'une droite (d) tout vecteur non nul ayant la même direction que (d).

Ainsi, quels que soient les points distincts A et B de (d), $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (d).

▶ **Exercices :** 109,110p154 (vecteur directeur)

Propriété Soit (d) une droite du plan muni d'un repère.

1. Si (d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a une équation de la forme $y = mx + p$. La constante m est le coefficient directeur et p est l'ordonnée à l'origine de la droite.
2. Si (d) est parallèle à l'axe des ordonnées, elle a une équation de la forme $x = k$.
3. Réciproquement, des équations de la forme $y = mx + p$ ou $x = k$ sont celles de droites.

On peut rassembler ces deux types d'équation en une seule :

Propriété Toute droite a une équation dite **cartésienne** de la forme

$$ax + by + c = 0$$

Réciproquement, si a, b et c sont des constantes avec a ou b non nul, alors l'équation $ax + by + c = 0$ est celle d'une droite.

Preuve : Il suffit de voir que les deux équations déjà connues peuvent s'écrire sous la forme $ax + by + c = 0$. Pour la réciproque :
- Si $b \neq 0$, on obtient $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ qui est l'équation d'une droite ;
- Si $b = 0$, on obtient $x = -c$ qui est aussi l'équation d'une droite.

□

Propriété
- Soit (d) une droite d'équation $ax + by + c = 0$. Alors $\overrightarrow{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (d).
- Soit (d) et (d') d'équation respective $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$. Alors (d) et (d') sont parallèles si et seulement si a et b sont proportionnels à a' et b' (i.e. $ab' - a'b = 0$).

Preuve :
- Soit $A(x_0; y_0)$ un point de (d).
  On peut prouver que $B(x_0 - b; y_0 + a)$ appartient aussi à (d). Or, $\overrightarrow{AB}(-b; a)$...
- (d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}(-b; a)$ et $\overrightarrow{u'}(-b'; a')$ sont colinéaires,
  i.e. $-ba' - a(-b') = 0 \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$.

□

Exemple $(d) : 2x - 3y + 7 = 0$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(3; 2)$ et est parallèle à $(d') : 4x - 6y - 2 = 0$ car $\frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} = 2$.

▶ **Exercices :** 116,121p154 (lire 8p147) (équation à partir d'un point et d'un vecteur)

▶ **Exercices :** 124,127p154 (équation à partir de deux points)

▶ **Exercices :** 129,130,131p154 (vérification)

▶ **Exercices :** 134,135p154 (représentation)

▶ **Exercices :** 138,140p154 (parallèle à une droite passant par un point)

▶ **Exercices :** 142,143,147p155 (déterminer un vecteur directeur)

▶ **Exercices :** 148,149p155 (parallélisme)

▶ **Exercices :** 156p155

IV. Décomposition de vecteurs

⊛ **Activité :** 3p141

Propriété Soit $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs non colinéaires. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ peut s'exprimer de façon unique en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, c'est à dire qu'il existe un unique couple de réels $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$

Preuve : On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, on représente $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ d'origine O. On écrit $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ avec $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{i}$ colinéaires, de même que $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{j}$. □

Remarque Les nombres x et y sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ (ou de A) dans le repèrs $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

▶ **Exercices :** 89,90,91,93p152

▶ **Exercices :** 97p153 (logique), 99p153 (coordonnées ou vecteurs)