Chapitre :
Fonctions

I. Fonctions polynomiales de degré 2

1. Définitions

⊛ **Activité :** exercices 8,9,10,11 page 6 (équations et inéquations simples de degré 2)

Définition Une fonction polynomiale (ou fonction polynôme) de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b, et c sont des réels, a étant non nul.
On dit aussi que f est un trinôme du second degré.

Définition Les réels a, b, et c sont appelés les coefficients de la fonction polynomiale.

Remarque On dit que la fonction est de degré 2 car la plus grande puissance de x est 2.

Exemple $f : x \longmapsto 3x^2 + 2x - 4$ est une fonction polynomiale de degré 2, ainsi que $g : x \longmapsto 2x^2 + 3$. Par contre, $h : x \longmapsto x^3 + 2x + 5$ n'en est pas une (elle est de degré 3), ni $l : x \longmapsto 2x + 4$ (affine, de degré 1).

Définition Soit f une fonction polynomiale et x un réel tel que $f(x) = 0$. On dit que x est une racine de f.

Méthode Étudier un trinôme du second degré, c'est chercher :
- d'éventuelles racines ;
- son signe en fonction des valeurs de x ;
- à tracer sa courbe représentative.

2. Représentation graphique

Il s'agit d'un rappel de la classe de seconde, où les variations ont été admises. Nous les admettons encore pour l'instant.

Propriété La représentation graphique d'une fonction polynomiale de degré 2 est une parabole.

Soit $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Le **sommet** de la parabole est atteint en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ (et $f(x_0)$ vaut $-\dfrac{\Delta}{4a}$).
- Si a est négatif, ce sommet est un maximum (f est croissante puis décroissante).
- Si a est positif, ce sommet est un minimum (f est décroissante puis croissante).

Exemple $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$

▶ **Exercices :** 16,17p16

On manque néanmoins d'informations pour tracer la courbe. On peut bien sûr (et même il faut) calculer les images de plusieurs valeurs de x. Mais déterminer les abscisses de points d'intersection avec l'axe des abscisses, autrement dit les racines, est intéressant. C'est le but de la suite.

3. Forme canonique, détermination des racines et du signe

⊛ **Activité :** 1p8 (méthode d'Al Khawarizmi)

⊛ **Activité :** 2p8 (observation du lien entre Δ et les racines)

La recherche de racines et l'étude du signe et sont en fait liées.

On va chercher à factoriser l'expression du trinôme.

(Utiliser un exemple concret das le même temps)

$$\begin{aligned}
P(x) = ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

Cette forme de l'expression de $P(x)$ est appelée la **forme canonique** de P.

▶ **Exercices :** 3,4p16 et 20p17

On définit $\Delta = b^2 - 4ac$. On a alors :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

La possibilité de factoriser dépend alors du signe de Δ, appelé le **discriminant** du trinôme.

- Si $\Delta < 0$ alors $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] > 0$ et le trinôme n'a pas de racine et est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et le trinôme n'a qu'une racine (dite double) : $x = -\frac{b}{2a}$.
  Le signe de P est celui de a.
- Si $\Delta > 0$, alors Δ a une racine carrée et $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$. Ainsi, $P(x)$ s'écrit sous la forme $P(x) = a[A^2 - B^2]$ que l'on peut factoriser sous la forme $P(x) = a(A - B)(A + B)$.
  Autrement dit, en identifiant A et B,

$$P(x) = a\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Ce qui fait que P a deux racines,

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Un tableau de signe permet de déduire le signe de P :

P est du signe de a à l'extérieur des racines, du signe opposé de a entre les deux racines.

Récapitulatif : racines et signe de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

signe de Δ	racines	signe de la fonction
$\Delta < 0$	$\emptyset$	signe de a
$\Delta = 0$	$\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	signe de a
$\Delta > 0$	$\left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$	signe de a à l'extérieur des racines signe de $-a$ entre les racines

Propriété

L'expression factorisée d'un trinôme du second degré qui a deux racines x_1 et x_2 est $a(x-x_1)(x-x_2)$.
Dans le cas où il y a une seule racine x_0 (double), la factorisation est $a(x-x_0)^2$.
On ne sait pas encore (en première) factoriser dans le cas où il n'y a pas de racine.

▶ **Exercices :** 22,23p17 (calcul de Δ)

▶ **Exercices :** 10p16 et 72,73p19 (factorisation)

▶ **Exercices :** 12,13p16 et 85,88p20 (signe)

▶ **Exercices :** 25,27p17 (résolution)

▶ **Exercices :** 37,38,39p18 et 75,77p19 (vision différente)

▶ **Exercice :** (algorithmique) 44p18

▶ **Exercices :** 52,54,58p18 (problèmes)

▶ **Exercices :** 104,106,109 (représentation, position relative)

▶ **Exercices :** 111,112p22 (avec un graphique)