Chapitre :
Fonctions de référence

∽

I. Valeur absolue

⊛ **Activité :** 2p34

Définition Soit x un nombre réel. Sur une droite munie d'un repère normé $(O;I)$ (i.e. une droite graduée telle que l'abscisse de O est 0 et celle de I est 1), on considère le point M d'abscisse x.
On appelle valeur absolue de x la distance OM ; on la note $|x|$.
On définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction valeur absolue par : $f \quad : \quad x \longmapsto |x|$.

Propriété
– La valeur absolue d'un nombre est toujours positive ou nulle ;
– Les valeurs absolues de deux nombres opposés sont égales ($|-x| = |x|$) ;
– On peut donner la définition suivante de $|x|$, indépendante de la notation $|.|$:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Exemple valeurs absolues de 5 , -5, $\pi - 4$ et $4 - \pi$.

Propriété La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Preuve : En exercice □
La représentation graphique de cette fonction est formée de deux demi-droites d'origine O.

figure

En général, la notation $|.|$ n'a pour utilité que de simplifier la définition d'une fonction. Pour faire des calculs ou résoudre des problèmes utilisant la valeur absolue, on fait en sorte de développer la définition de la valeur absolue.

Exemple exercice 56 de la page 45

▶ **Exercices :** 42,43,44,46,48,50 p44

▶ **Exercices :** 53,55,58 p45

II. Fonction racine carrée

Définition La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $x \mapsto \sqrt{x}$.

Propriété La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Preuve : On utilise la définition, et on utilise l'expression « conjuguée » de $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ (voir page 38).
□

Représentation graphique

▶ **Exercices :** 64,65,66p45

III. Comparaison de x, x^2 et $\sqrt{x}$

⊛ **Activité :** 3p35

Propriété
- Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.
- Si $x \geq 1$, alors $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

Preuve : Voir activité ou livre page 38. □

Représentation des trois courbes ; positions relatives explicitées

▶ **Exercices :** 73,75,76,78p46

▶ **Exercices :** (DM ?) : 23,24,25,26p43

IV. Opérations avec les fonctions

⊛ **Activité :** 4p35 (ajouter une constante, multiplier par une constante)

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c une constante.
On note $f+c$ la fonction définie sur I par : $(f+c)(x) = f(x) + c$.
On note cf la fonction définie sur I par $(cf)(x) = c \times f(x)$.

Propriété
- les fonctions f et $f+c$ ont le même sens de variation sur I.
- Si $c > 0$, alors f et cf ont le même sens de variation du I.
- Si $c < 0$, alors f et cf ont des sens de variations contraires sur I.

Preuve : Exercice ! □

▶ **Exercices :** 83,85,86p46-47

⊛ **Activité :** 5p35 (inverse)

Définition Soit u une fonction. On définit la fonction $\frac{1}{u}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_u$ tel que $u(x) \neq 0$ par

$$\left(\frac{1}{u}\right)(x) = \frac{1}{u(x)}$$

Propriété Soit I un intervalle tel que u ne s'annule pas et conserve toujours le même signe sur I, alors u et $\frac{1}{u}$ ont des variations contraires sur I.

▶ **Exercices :** 87,89p47

Définition Soit u une fonction. On définit la fonction $\sqrt{u}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_u$ tel que $u(x) \geq 0$ par

$$(\sqrt{u})(x) = \sqrt{u(x)}$$

Propriété Soit I un intervalle tel que $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations sur I.

Preuve : Exercice ! □

▶ **Exercices :** 90,91,92p47

▶ **Exercices :** 96,97,98p46-47

▶ **Exercices :** 101p48

Définition Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I.
- la fonction $u+v$ est définie sur I par $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$;
- la fonction uv est définie sur I par $(uv)(x) = u(x) \times v(x)$.

En DM : somme et produits de fonctions, propriété suivantes :

Propriété Si u et v sont croissantes sur I, alors il en est de même pour $u+v$.
Si u et v sont décroissantes sur I, alors il en est de même pour $u-v$.
Si u et v n'ont pas les mêmes variations, on ne peut pas conclure sans étude détaillée.
C'est encore plus délicat pour le produit uv.