Chapitre :
Variables aléatoires

∽

⊛ **Activité :** 1 page 268

I. Définitions

Définition Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. On définit une variable aléatoire X sur E quand on associe un (unique) réel à chaque issue de E.
L'ensemble des réels associés est dit ensemble des valeurs prises par X.

Exemple Un dé à 6 faces est lancé. On gagne $0,50$€ si l'on obtient entre 2 et 5, on gagne 2€ si l'on obtient 6 et on perd 6€ si l'on obtient 1. On note X la valeur (algébrique) en euro du gain obtenu.

Figure représentant E et les valeurs prises par X.

Remarque Un même réel peut être obtenu avec plusieurs issues, mais à chaque issue est associée un unique réel.

Les variables aléatoires permettent de définir des événements :

Définition Soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
– On note « $X = x_i$ » l'ensemble des issues de E associées à la valeur x_i.
– On note « $X \geq x_i$ » l'ensemble des issues de E associées à une valeur supérieure ou égale à x_i.

▶ **Exercices :** 13,14p277
Puisque « $X = x_i$ » est un événement, on peut en calculer la probabilité notée $P(X = x_i)$ (si l'ensemble E est muni d'une loi de probabilité P).

Définition Soit X une variable aléatoire. On appelle loi de probabilité de X la donnée de la probabilité $P(X = x_i)$ pour toutes les valeurs x_i prises par X.

Elle est souvent représentée sous forme de tableau.

Exemple Tableau de la loi de probabilités de l'exemple ci-dessus.

x_i	-6	$0,5$	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

Remarque Les événements « $X = x_i$ » sont disjoints d'après la remarque précédente, et l'ensemble de ces événements regroupe toutes les issues possibles de E. Ainsi :

Propriété On a l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} P(X = x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_r) = 1$

Il s'agit donc bien d'une loi de probabilité.

▶ **Exercices :** 18,19,20p277

▶ **Exercices :** 23,24p278

II. Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1,...x_r. On note $p_i = P(X = x_i)$.
En répétant de très nombreuses fois l'expérience aléatoire, on s'aperçoit que la fréquence d'apparition de chaque valeur x_i s'approche de p_i. Pour calculer la moyenne des valeurs obtenues, on peut donc utiliser les valeurs p_i comme fréquence. On obtient ce que l'on appelle l'espérance de X, notée $E(X)$ et donnée donc par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} x_i p_i = x_1 p_1 + \dots x_r p_r$$

Par suite, on définit la variance de X notée $V(X)$ par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{r} p_i (x_i - E(X))^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2 \right) - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Et bien sûr l'écart-type définit par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

▶ **Exercices :** 41,42,44,45p280

⊛ **Activité :** 4p269 (appliquer une fonction affine)

Propriété Soit a et b des réels. Alors :

$$E(aX + b) = aE(x) + b \qquad \text{et} \qquad V(aX) = a^2 V(X)$$

Preuve : Voir celle du livre □

▶ **Exercices :** 51,52,46p281

▶ **Exercices :** DM (simulation par machine) : 28p278

III. Schéma de Bernoulli

▶ **Exercices :** p292 (questions bleues)

⊛ **Activité :** 1p294

Définition On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire présentant deux issues, l'une S appelée succès et l'autre $\overline{S}$ appelée échec. On note p la probabilité du succès, puis $q = 1 - p$ la probabilité de l'échec.
La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée variable aléatoire de Bernoulli. La loi de probabilité, appelée loi de Bernoulli de paramètre p est alors donnée par :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

Propriété Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
Alors :

$$E(X) = p \qquad V(X) = p(1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

Preuve : Exercice. □

Définition L'expérience aléatoire consistant à répéter n fois ($n \in \mathbb{N}^\star$) de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p s'appelle un **schéma de Bernoulli de paramètres** n **et** p.
On considère la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n épreuves. On appelle alors **loi binomiale de paramètres** n **et** p la loi de probabilité de X. On la note $\mathcal{B}(n, p)$.

Exemple Exemples avec $n = 2$ et $n = 3$, en faisant les arbres pondérés associés.

▶ **Exercices :** 1,3,4p306

▶ **Exercices :** 15,17,18,19p307

▶ **Exercices :** 22,23,24,25p307

IV. Coefficients binomiaux

⊛ **Activité :** 3pp294-295 (nombre de chemins sur un quadrillage)

Définition Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n.
Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre d'un schéma de Bernoulli.

Propriété

1. Pour tout entier k compris entre 0 et n, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. (Formule de Pascal) pour tout entier n non nul et tout entier k compris entre 0 et $n-1$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Preuve : Le nombre de chemins réalisant k échecs est le même que le nombre de chemins réalisant $n-k$ échecs (il suffit d'inverser les rôles du succès et de l'échec pour s'en convaincre), d'où la première formule.
Pour réaliser $k+1$ succès pour $n+1$ répétitions, il y a deux manières distinctes :
- Soit on a réalisé k succès pendant les n premières répétitions, et ensuite on obtient un échec, ce qui fait $\binom{n}{k}$ possibilités ;
- Soit on a réalisé $k+1$ succès pendant les n premières répétitions, et ensuite on obtient un succès, ce qui fait $\binom{n}{k+1}$ possibilités.

En ajoutant toutes les possibilités, on obtient bien la formule donnée. □

Comment calculer les coefficients binomiaux ?
On peut utiliser la calculatrice (OPTN → PROB → nCr pour Casio ; MATH → PRB → Combinaison pour TI). Taper d'abord n, puis la commande, puis k.
On peut aussi utiliser le **Triangle de Pascal** pour les petites valeurs :

$k \rightarrow$	0	1	2	3	4
$n=0$	1				
$n=1$	1	1			
$n=2$	1	2	1		
$n=2$	1	3	3	1	
$n=4$	1	4	6	4	1

On peut donc maintenant donner une écriture générale de la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.

Propriété Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Alors, pour tout k compris entre 0 et n,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Preuve : C'est immédiat d'après ce que nous avons vu précédemment. □

Propriété L'espérance mathématique d'une variable X qui suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$ est np. Sa variance est $np(p-1)$

Preuve : Admis. □

Les calculatrices peuvent permettre de donner les valeurs (y compris de la fréquence cumulée). Voir le livre page 300.

▶ **Exercices :** 28,31,32p308 (calculs)

▶ **Exercices :** 37,38p308 (loi binomiale abstraite)

▶ **Exercices :** 50,51p310 (probabilité maximale, espérance et variance)

▶ **Exercices :** 41,46p309 (loi binomiale concrète)