Chapitre :
Dérivation

I. Nombre dérivé

⊛ **Activité :** fiche

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant un réel a. On dit que f est dérivable en a si l'expression :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

qui représente le coefficient directeur d'une droite sécante à $\mathcal{C}_f$ passant par le point $A(a; f(a))$, s'approche d'un nombre réel l lorsque h s'approche 0 (On dit : a une limite réelle l lorsque h tend vers 0).
On appelle **nombre dérivé de f en a** cette limite l. On la note $f'(a)$.
On a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a) \text{ ou } \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

(en effet, on pose $x=a+h$)
Géométriquement, le nombre dérivé de f en a est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

Exemple Dessin représentant les pentes, M s'approchant du point $A(a; f(a))$.

Exemple soit $f(x)=2x^2+5x-2$. et $a=1$. Alors

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{2(1+h)^2+5(1+h)-2-(2(1)^2+5(1)-2)}{h}=\frac{2h^2+4h+5h}{h}=2h+9$$

Cette expression a pour limite 9 quand h tend vers 0. Donc $f'(1)=9$

Exemple En général on s'intéresse plus au nombre dérivé d'une fonction en un point x_0 quelconque. En reprenant la fonction f précédente, on exprime alors :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{2(x_0+h)^2+5(x_0+h)-2-(2x_0^2+5x_0-2)}{h}=\frac{2x_0^2+4x_0h+5h}{h}=2h+4x_0+5$$

Cette expression a pour limite $4x_0+5$ quand h tend vers 0. Donc $f'(x_0)=4x_0+5$

▶ **Exercices :** 5,6,7,8p68

▶ **Exercices :** 18,19,20p69

▶ **Exercices :** 21-26p69

Propriété Soit f une fonction admettant un nombre dérivé en a. Alors la tangente à la courbe de f en a a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Preuve : Notons $y = \alpha x + \beta$ l'équation de la droite. La pente de la tangente vaut $f'(a)$ comme remarqué précédemment, donc $\alpha = f'(a)$. Or la droite, tangente à la courbe de f, passe par le point de coordonnées $(a; f(a))$. Ainsi, $f(a) = f'(a)a + \beta$. Donc $\beta = f(a) - f'(a)a$ et l'équation de la droite est alors :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a)$$

□

▶ **Exercices :** 32,33,34,36p69

II. Fonction dérivée

1. Définition et règles de calcul

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en tout réel de I, on dit que f est dérivable sur I et on définie une nouvelle fonction, la dérivée de f sur I, notée f', par :

$$f' : x \longmapsto f'(x)$$

. où $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x.

Exemple La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est dérivable en tout x_0 de $\mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 2ax_0 + b$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée f' est définie par $f'(x) = 2ax + b$.

Propriété Voici données dans le tableau ci-dessous les dérivées de fonctions de référence :

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^\star$

Preuve : Faire la preuve pour $f(x) = \dfrac{1}{x}$, les autres ayant été vues ou étant admises (x^n). □

Propriété **(Opération sur les fonctions et dérivées)** Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.
- $(u + v)$ est dérivable et $(u + v)' = u' + v'$.
- uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Cas particulier, si $v(x) = k$ (v est constante égale à k, $k \in \mathbb{R}$), $(ku)' = ku'$.
- $\dfrac{u}{v}$ est dérivable pour tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
- Cas particulier, si $u(x) = 1$, on a $u'(x) = 0$ et donc $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$.

Preuve : Faire celle de $u + v$. □

Exemple On souhaite dériver la fonction $f(x) = (3x + 5)\sqrt{x}$. f peut être vue comme un produit : $f = uv$ avec $u(x) = 3x + 5$ et $v(x) = \sqrt{x}$ La fonction racine carrée v est dérivable sur $]0; +\infty[$ ainsi que la fonction affine u. Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f' = u'v + uv'$. On a $u'(x) = 3$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc

$$f'(x) = 3 \times \sqrt{x} + (3x + 5) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

▶ **Exercices :** 71 à 76 p 73 (polynomiales)

▶ **Exercices :** 78,79p73 (produit)

▶ **Exercices :** 80 à 86p73 (quotient)

▶ **Exercices :** (avec un logiciel de calcul formel) 101 à 108p75

2. Signe de f' et variation de f

⊛ **Activité :** 3p86 (observation des variations de f et du signe de f'.
D'après les observations graphiques du nombre dérivé, on peut donner :

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si f est croissante sur I, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- Si f est décroissante sur I, alors $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$
- Si f est constante sur I, alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

L'intérêt principal du calcul de la dérivée est le théorème suivant (admis) :

Théorème Soit f une fonction dérivable sur une intervalle I.
- Si $f'(x) = 0$ sur I, alors f est constante.
- Si $f'(x)$ est strictement positive sauf éventuellement en quelques points isolés où elle s'annule, alors f est croissante.
- Si $f'(x)$ est strictement négative sauf éventuellement en quelques points isolés où elle s'annule, alors f est décroissante.

Exemple Soit $f(x) = x^2 - 3x + 3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 3$. $f'(x)$ s'annule pour $x = \frac{3}{2}$. On peut alors donner le tableau de variation de f.

Remarque On retrouve les variations des fonctions polynomiales de degré 2 : l'extremum de la fonction en exemple est bien obtenu en $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$.

▶ **Exercices :** 16,18 (la 17 contient une faute de frappe) p93 (graphiquement f, donner le signe de f')

▶ **Exercices :** 21,22p93 (graphiquement f' donner les variations de f)

▶ **Exercices :** 24,25,26,33,34p94 (par calcul, fonctions polynomiales)

▶ **Exercices :** 43,44,45 p95 (quotients)

3. Extrema

Définition (Extremum local) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local M en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 et inclus dans I tel que $M = f(x_0)$ soit le maximum (resp. minimum) de f sur J.
On appelle extremum local un minimum ou un maximum local.

Dessin

Théorème Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0

▶ **Exercices :** 53,54,55p96 (polynomiales de degré 3)

▶ **Exercices :** 62p97 (maximisation d'un volume), 65p97 (minimisation d'un coût moyen)

▶ **Exercices :** 76,77p99 (obtention d'inégalités)

★ **Approfondissement :** 94,95p103