Chapitre :
Produit scalaire

∽

I. Définition par normes

⊛ **Activité :** 1p192

Définition Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Géométriquement, si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2)$$

Propriété

1. Si un des deux vecteurs est nul, alors le produit scalaire est nul : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
2. Le produit scalaire est symétrique, c'est à dire que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.
3. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par lui-même, appelé carré scalaire, est noté $\overrightarrow{u}^2$ et vaut $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Preuve : Exercice □

Remarque On peut alors noter :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left((\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 - \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2\right)$$

Propriété $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Preuve : Compte tenu de la définition du produit scalaire et de sa vision géométrique, cette propriété provient du théorème de Pythagore. □

Exemple Voir les exemples du livre page 195 (dans un parallélogramme)

▶ **Exercices :** 24,25p201

II. Expression analytique

On considère le plan muni d'un repère orthonormé.

Propriété Soit $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$. Alors :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

⚠ formule à ne pas confondre avec la colinéarité des vecteurs !

Preuve : On a $\overrightarrow{u}^2 = x^2+y^2$, $\overrightarrow{v}^2 = x'^2+y'^2$ et $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}(x+x';y+y')$ donc $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = (x+x')^2+(y+y')^2$. Ainsi,

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}((x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)) = \ldots = xx'+yy'$$

□

Exemple $\overrightarrow{u}(-3;4)$ et $\overrightarrow{v}(-2;5)$.

▶ **Exercices :** 32,34,36,40p201

▶ **Exercices :** 44p202

▶ **Exercice :** (algorithmique) 33p201 puis 43p202

III. Propriétés du produit scalaire

Propriété Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et k un réel. On a alors :

1. $(k\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$
2. $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$
3. $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$ (identité remarquable !)

Preuve : Elle se fait simplement en vérifiant par calcul, en utilisant les coordonnées, que l'on trouve les mêmes expressions dans chaque membre d'une égalité. □

▶ **Exercices :** 50-53p202

▶ **Exercices :** 55-57p202

IV. Expression par le projeté orthogonal

⊛ **Activité :** 4p193 (première partie en salle info ou sur tableau interactif)

Définition Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite (AB) est le point H, intersection de (AB) et de la droite perpendiculaire à (AB) passant par M.

Dessin

Propriété Soit A, B et C trois points. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

Cette propriété se généralise de la manière suivante :

Propriété Soit A, B, C et D quatre points. Soit C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB). Alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

Preuve : On a d'après la relation de Chasles $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}$, puis par propriétés du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D}$$

Or, par définition (CC') et (AB) (resp. (DD') et (AB)) sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{AB}$ (resp. $\overrightarrow{DD'}$ et $\overrightarrow{AB}$) sont orthogonaux. Par conséquent leur produit scalaire est nul. Il ne reste donc que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

En conséquence, il est possible de se ramener au calcul du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires. Or, on a la propriété suivante :

Propriété Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs **colinéaires** et non nuls. Alors
- S'ils sont de même sens, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD$
- S'ils sont de sens contraire, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD$.

Preuve : Les vecteurs étant colinéaires, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (k\overrightarrow{AB}) = k(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}) = kAB^2 = AB \times kAB$. Or :
- Si les vecteurs sont de même sens, $k > 0$ et $CD = kAB$, ainsi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD$.
- Sinon, $k < 0$ et $CD = -kAB$, ainsi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times (-kAB) = -AB \times CD$. □

⚠ Cette formule est totalement fausse si les vecteurs ne sont pas colinéaires !

▶ **Exercices :** 63,64,67,70p203

▶ **Exercices :** 74,76p204 (lieux)

V. Expression avec les angles

⊛ **Activité :** 5p193 (travail d'une force, déplacement d'une luge)

Propriété Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Preuve : Voir preuve du livre page 198 (qui se fait en deux cas, en utilisant le projeté scalaire et les vieilles formules trigonométriques). □

▶ **Exercices :** 87,88,94,96p205

▶ **Exercices :** 99,100,104p206

VI. Quelques propriétés géométriques

Théorème **(De la médiane)** Soit A et B deux points et I le milieu de $[AB]$. Alors quelque soit le point M,

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Preuve : On utilise le fait que le carré d'une longueur est aussi un carré scalaire et on utilise la relation de Chasles pour introduire I. Par suite, I étant le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ et $IA = IB = \dfrac{AB}{2}$.
(Voir le livre pour plus de détails) □

▶ **Exercices :** 107,108p206

★ **Approfondissement :** (conseiller) 118 à 130p207 (choisir la formule adaptée au problème)

VII. Applications du produit scalaire

1. Équations de droites et vecteur normal

⊛ **Activité :** 1p218 (vecteur normal et équation de droite)

Définition Un vecteur **normal** à une droite (d) est un vecteur non nul orthogonal à tout vecteur directeur de (d).

Propriété Soit (d) une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a; b)$. Alors une équation de (d) s'écrit $ax + by + c = 0$.
Réciproquement, si a et b ne sont pas nuls tous les deux, l'équation $ax + by + c = 0$ est celle d'une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a; b)$.

▶ **Exercices :** 19,25,20p225 ,34p226

2. Équations de cercles

⊛ **Activité :** 2p218 (équation de cercle par centre et rayon ou par diamètre ; forme canonique)

Propriété Un point $M(x; y)$ appartient au cercle de centre $A(x_A; y_A)$ et de rayon R si et seulement si ses coordonnées satisfont l'équation :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

Propriété Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

Preuve : Vue en DM. □

▶ **Exercices :** 38,40,44p226, 47p227

3. Angles et longueurs

La définition de produit scalaire que nous avons donnée et la définition avec les angles mises en commun donnent la forme l'Al Kashi qui généralise la formule de Pythagore aux triangles quelconques :

Propriété **(Formule d'Al Kashi)** Pour tout triangle ABC tel que $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

(Penser au théorème de Pythagore, avec a « hypoténuse » et $\widehat{A}$ « angle droit »).
et de même, par rotation des lettres :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$$

▶ **Exercice :** 58p228

Propriété **(Formule des sinus)** Pour tout triangle ABC avec les mêmes notations que précédemment,

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

Preuve (qui n'a rien à voir avec le produit scalaire) : Par rotation des notations, il suffit de montrer une seule égalité, et avec le produit en croix il suffit de montrer que

$$a\sin\widehat{B} = b\sin\widehat{A}$$

Soit x la longueur de la hauteur de ABC issue de C. Alors $\sin\widehat{B} = \dfrac{x}{a}$ et $\sin\widehat{A} = \dfrac{x}{b}$ (figure !). D'où $x = a\sin\widehat{B} = b\sin\widehat{A}$.
(vrai aussi quand la hauteur sort du triangle car $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$). □

▶ **Exercice :** 60p228

Propriété **(Addition d'angles et trigonométrie)**

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

Preuve :L'idée est de calculer un produit scalaire de deux manières différentes, l'une avec les coordonnées, l'autre géométriquement. Soit $\overrightarrow{u}(\cos b;\sin b)$ et $\overrightarrow{v}(\cos a;\sin a)$. Les deux vecteurs sont de norme 1 et $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = a-b$ (dessin !). Alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \cos a\cos b + \sin a\sin b = \cos(a-b)$. En changeant b par $-b$, du fait que $\sin(-b) = -\sin b$, on obtient $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ Pour les autres égalités, on utilise aussi le fait que $\cos(\dfrac{\pi}{2} - x) = \sin x$. □

▶ **Exercice :** 82p230

Propriété **(Formules de duplication)**

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \qquad \sin 2a = 2\sin a\cos a$$

Preuve : Simple application des formules d'addition et de $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$. □

▶ **Exercice :** 83p230

Propriété **(Formules de linéarisation)**

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

Preuve : Simple application des égalités de la première formule de duplication. □