Chapitre :
Suites

∽

I. Définitions

⊛ **Activité :** Fiche

Définition Une suite u de nombres réels est une fonction associant à tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier n_0 donné, un nombre réel $u(n)$, noté u_n.
On dit que u_n est le terme d'**indice** n (ou de **rang** n) de la suite.
On peut noter la suite u sous la forme $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Remarque Le plus souvent, $n_0 = 0$. On note alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Parfois $n_0 = 1$.

Remarque Si $n_0 = 0$, le premier terme de la suite est u_0, le second u_1, etc...

Il ne faut donc pas confondre le **rang** (ou **l'indice**) avec le classement du terme dans la suite ; il peut y avoir un décalage entre les deux.

Exemple
– La suite u définie par $u_n = \sqrt{n-2}$ est définie pour tout $n \geq 2$. On la note $(u_n)_{n\geq 2}$.
– La suite v définie par $v_n = 2n^2 + 3n - 5$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On la note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II. Deux manières de définir

Définition Une suite u est définie de façon **explicite** lorsque le terme général u_n est exprimé en fonction de n ($u_n = f(n)$)

Exemple La suite u définie par $u_n = 4n - 7$ est définie explicitement. Ici, $f(x) = 4x - 7$.

On représente une telle suite en plaçant les points $(n; f(n))$ dans un repère.

Dessin

Définition Une suite u est définie **par récurrence** lorsqu'un terme de la suite est définie en fonction du précédent. Plus précisément :

$$\begin{cases} u_{n_0}, & \text{le premier terme, est donné} \\ u_{n+1} = & f(u_n) \text{ pour tout } n \geq n_0 \text{, où } f \text{ est une fonction} \end{cases}$$

Exemple Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 4$. La fonction f associée à la suite est définie par $f(x) = x^2 - 4$.

Remarque On peut représenter une telle suite sous forme de « toile d'araignée », ou de « marches d'escaliers ». (À voir au tableau ou avec la calculatrice)

▶ **Exercices :** 1,2 page 120 (indice et classement des termes)

▶ **Exercices :** 3,5p120 puis 26,30 p121 (calcul de termes)

▶ **Exercices :** 34,35p121 (travail sur les indices)

▶ **Exercice :** 36p121 (calcul de termes avec des suites définies par récurrence)

▶ **Exercice :** (DM) 40p122 (récurrence d'ordre 2)

▶ **Exercice :** 43p122 (utilisation de la calculatrice pour obtenir les valeurs)

III. Variations et seuils

Définition Soit u une suite définie pour $n \geq n_0$.
- u est croissante si, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$. Si $u_{n+1} > u_n$, elle est strictement croissante.
- u est décroissante si, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$. Si $u_{n+1} < u_n$, elle est strictement décroissante.
- u est constante si, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
- u est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Remarque Une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante (donc non monotone)

Pour déterminer les variations d'une suite définie explicitement, on peut étudier la fonction.

Exemple Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 0)$, comme la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante, u est décroissante.

Dans le cas général, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exemple Si $u_{n+1} = u_n + 7$, on a $u_{n+1} - u_n = 7 > 0$, donc la suite est strictement croissante.

Dans certains cas, on peut chercher à déterminer des **seuils**. Cela signifie déterminer un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs (ou inférieurs) à une constante donnée.

Exemple Soit la suite u définie pour tout $n > 0$ par $u_n = \dfrac{2}{n^2}$.
On peut démontrer que la suite u est strictement décroissante (mais toujours positive). On observe que les valeurs prises par la suite sont de plus en plus proches de 0. On peut alors par exemple chercher à partir de quelle valeur de n on a $u_n < 10^{-2}$

Pour cela, on résout :

$$\begin{aligned}
u_n < 10^{-2} &\Leftrightarrow \frac{2}{n^2} < 10^{-2} \\
&\Leftrightarrow 2 \times 10^2 < n^2 \text{ (on multiplie par des nombres positifs)} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2 \times 10^2} < n \text{ (on applique la fonction racine carrée croissante sur}[0;+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n > 10\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Le plus petit entier n_0 supérieur à $10\sqrt{2}$, autrement dit $n_0 = 15$, est donc le seuil à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à 10^{-2}.

▶ **Exercices :** 49,52p123 (explicites)

▶ **Exercices :** 51p123 (récurrence)

▶ **Exercices :** 53,54p123 (mélange)

▶ **Exercices :** (DM) 57,58p123 (propriété sur la somme de deux suites)

▶ **Exercices :** 61,62p124 (recherche de seuils)

IV. Suites remarquables

1. Suites arithmétiques

Définition Soit n_0 un entier naturel, r un réel et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite. Si, quelque soit $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n = r$, on dit que u est une suite arithmétique de raison r.

Remarque Cette définition donne une relation de récurrence pour la suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque $\dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} = \dfrac{r + u_n - r + u_n}{2} = u_n$: u_n est la moyenne **arithmétique** de u_{n-1} et u_{n+1}.

Exemple La suite u définie par $u_n = 5n + 3$ pour tout $n \geq 0$ est arithémtique de raison 5. En effet, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 3 - (5n+3) = 5n + 5 + 3 - 5n - 3 = 5$.

Plus généralement :
Toute suite de la forme $u_n = r \times n + a$, avec r et a des nombres réels, est arithmétique de raison r.
La réciproque est vraie :

Théorème Soit r un nombre réel et soit u une suite arithmétique de raison r, définie pour $n \geq 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = r \times n + u_0$. Plus généralement si $p \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \geq p$:

$$u_n = r \times (n - p) + u_p$$

(utile si la suite est définie pour $n \geq p$)

Preuve : Admis $\square$

Remarque Ce théorème donne une définition explicite des suites arithmétiques.

Propriété Selon la valeur de r, on peut déterminer la variation d'une suite arithmétique de raison r.

1. Si $r < 0$, alors la suite est décroissante ;
2. Si $r = 0$, alors la suite est constante ;
3. Si $r > 0$, alors la suite est croissante.

Preuve : Évident d'après la définition. $\square$

Propriété Soit u une suite arithmétique de raison r définie pour $n \geq 0$. Pour tout $n \geq 0$, on définit $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Alors

$$S_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

Preuve : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 + (r + u_0) + \cdots + (nr + u_0) = (n+1)u_0 + r(1 + \cdots + n)$.
Or, $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ car $(1 + \cdots + n) + (n + \cdots + 1) = n(n+1)$.

Donc $S_n = (n+1)u_0 + r\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)2u_0}{2} + r\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n+1}{2}(2u_0+nr) = \dfrac{n+1}{2}(u_0+nr+u_0)$.
Comme $u_n = nr + u_0$, on trouve bien le résultat souhaité. □

▶ **Exercices :** 70,71,75,77p124

▶ **Exercices :** 85,86,87p125 (avec sommes)

2. Suites géométriques

⊛ **Activité :** 4,5,6p108 (manipulation de puissances)

Définition Soit n_0 un entier naturel, q un nombre réel et $(v_n)_{n\geq n_0}$ une suite. Si quel que soit $n \geq n_0$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q$, on dit que v est une suite géométrique de raison q.

Remarque On définit une suite géométrique par récurrence, puisque $v_{n+1} = q \times v_n$.

Exemple Soit $v_n = 2 \times 3^n$ $(n \geq 0)$. Alors v est une suite géométrique de raison 3. En effet, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3$.

De manière générale, toute suite de la forme $v_n = b \times q^n$ (b et q réels) est une suite géométrique de raison q. La réciproque est vraie :

Théorème Soit q un réel non nul et v une suite géométrique de raison q. Alors quelque soit $n \geq 0$, $v_n = v_0 \times q^n$.
De plus, si $p \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \geq p$,

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Propriété En fonction de q $(q > 0)$, on peut déterminer les variations de la suite géométrique v de raison q :
- Si $q > 1$, alors v est croissante si $v_0 > 0$, décroissante sinon.
- Si $0 < q < 1$, alors v est décroissante si $v_0 > 0$, croissante sinon.

Preuve : On étudie le signe de $v_{n+1} - v_n = v_0q^{n+1} - v_0q^n = v_0q^n(q-1)$.
Dans tous les cas, $q > 0$. le signe de $v_{n+1} - v_n$, ne dépend alors que du signe de v_0 et de $q - 1$. Il y a donc quatre cas possibles, qui donnent les variations affirmées par la propriété. □

Propriété Soit v une suite géométrique de raison q définie pour $n \geq 0$. Soit, pour tout $n \geq 0$, $S_n = v_0 + \cdots + v_n$. Alors, si $q = 1$, $S_n = (n+1)v_0$ et si $q \neq 1$,

$$S_n = v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve : Si $q = 1$, alors $S_n = v_0 + \cdots + v_0 \times q^n = v_0 + \cdots + v_0 \times 1^n = v_0 + \cdots + v_0 = (n+1)v_0$.
Si $q \neq 1$, $S_n = v_0 + v_0 \times q + \cdots + v_0 \times q^n = v_0 \times (1 + q + \cdots + q^n)$.
Or, $(1 + q + \cdots + q^n) - q(1 + q + \cdots + q^n) = 1 - q^{n+1}$, donc $(1 + q + \cdots + q^n) = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

D'où le résultat. □

▶ **Exercices :** 91,94,96,100p126

▶ **Exercices :** 102,104p126 (sommes)

▶ **Exercice :** 109p126