Chapitre : Fonctions

∽

I. Généralités

1. Intervalles

Définition L'ensemble de tous les nombres (entiers, décimaux, rationnels, irrationnels) est appelé ensemble des nombres réels et est noté $\mathbb{R}$.

On le représente souvent à l'aide d'une droite graduée.

Dessin avec en exemple plusieurs types de nombres.

Définition Un intervalle est un ensemble de nombres réels. Il y a plusieurs types d'intervalles, mais ils ont tous en commun pour leur notation deux valeurs, un nombre ou l'infini (∞), que l'on appelle les bornes de l'intervalle, et deux crochets.
Soit a et b deux nombres réels.
- L'intervalle $]a;b[$ est un intervalle **ouvert**, ensemble de tous les nombres réels x tels que $a < x < b$ (a et b sont exclus).
- L'intervalle $[a;b]$ est un intervalle **fermé**, ensemble de tous les nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$ (a et b sont inclus).
- L'intervalle $]a;+\infty[$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x > a$.
- L'intervalle $]-\infty;b]$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x \leq b$.

On définit de manière similaire des intervalles comme $[a;b[$ ou $]a;b]$ (dits semi-ouverts).
Le sens des crochets permet de signifier que le nombre est **compris** dans l'intervalle ou **exclus** de l'intervalle. L'infini n'est jamais inclu (car ce n'est pas un nombre réel).

Dessin représentant des intervalles. Appartenance.

On a $5 \in [2;7]$ car $2 \leq 5 \leq 7$, mais $9 \notin [2;7]$.
Voir page 27

▶ **Exercices :** 1,2,3,4p27

Définition L'union de deux intervalles est l'ensemble des nombres qui sont au moins dans l'un des deux intervalles. On utilise la notation $\cup$ pour faire l'union de deux intervalles, on la prononce « union ».

Exemple $[1;2[\cup]2;5]$ est l'ensemble des nombres x tels que $1 \leq x \leq 5$ et $x \neq 2$. (Dessin).

2. Fonctions

(a) Vocabulaire

Définition Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ (le plus souvent un intervalle ou une union d'intervalles). Définir une fonction f c'est associer à tout nombre x de $\mathcal{D}$ un **unique** nombre réel $f(x)$.
On dit que $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f, on le note parfois $\mathcal{D}_f$.
On dit que $f(x)$ est l'**image** de x. Pour tout x de $\mathcal{D}$, l'image de x est donc unique.

Exemple On peut définir une fonction à l'aide d'une expression littérale (qui utilise la lettre x, appelée variable). Soit par exemple f, la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. C'est la fonction qui à tout nombre positif associe sa racine carrée.

On note $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
L'image de 4 par la fonction f est $f(4) = \sqrt{4} = 2$.

▶ **Exercices :** 9,10,11p29

Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. Soit y un nombre réel. Un **antécédent** de y pour la fonction f est un nombre x tel que $f(x) = y$.

Exemple Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On a $f(2) = 4$ et $f(-2) = 4$. Ainsi, 2 et -2 sont tous les deux des antécédents de 4. Le nombre -4 n'a pas d'antécédent par f car pour tout nombre réel, $f(x) = x^2 \geq 0$.

Remarque l'image d'un nombre est unique, mais un nombre peut avoir aucun, un seul ou plusieurs antécédents.

▶ **Exercices :** 15,16p31

(b) Représentation graphique

Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. La représentation graphique de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ pour tout x de $\mathcal{D}$. On note parfois $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{C}_f$ cette courbe. On associe cette courbe à l'équation $y = f(x)$ (y est l'ordonnée, x l'abscisse).

Dessin avec une image (remarquer l'unicité de l'image)

⚠ Une lecture graphique des images d'une fonction ne donne que des valeurs approchées.
Pour construire une représentation graphique d'une fonction f, il faut calculer l'image $f(x)$ de plu-

sieurs nombres x de $\mathcal{D}$.

▶ **Exercices :** 6,7,8p28-29 (images)

▶ **Exercices :** 14,17,19p31 (antécédents)

▶ **Exercices :** 70,71p45 (détermination de points sur une courbe)

▶ **Exercice :** 72p45 (tracé de courbe avec la calculatrice) : voir page 270 ou 272 selon le modèle.

▶ **Exercice :** 63p44 (ensemble de définition)

★ **Approfondissement :** 66 (logique), 67 (problème) p44

II. Variations de fonctions

⊛ **Activité :** 1p23

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
– On dit que f est croissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \leq f(b)$.
– On dit que f est décroissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \geq f(b)$.

Autrement dit, une fonction croissante est une fonction qui préserve l'ordre, alors qu'une fonction décroissante est une fonction qui change l'ordre.

Dessin

Si les inégalités entre les images de $f(a)$ et $f(b)$ sont strictes, on dit que f est strictement croissante (ou décroissante).
On peut indiquer les intervalles sur lesquels une fonction est croissante ou décroissante à l'aide d'un tableau de variations.

Courbe et tableau associés

▶ **Exercices :** 26,27,28,29p35

▶ **Exercices :** 31,32p36
On observe alors sur la courbe ou le tableau des valeurs remarquables qui peuvent correspondre à des maximums (ou maxima) ou à des minimums (ou minima).
Un extremum (maximum ou minimum) est une valeur atteinte par la fonction. Ainsi

Définition $f(a)$ est un maximum (resp. minimum) de f sur I si $f(a)$ est la plus grande (resp. petite) valeur de f sur I, c'est à dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(a) \leq f(x)$).

Exemple valeurs maximales de l'exemple précédent.

▶ **Exercices :** 34,35,36,37p38

▶ **Exercices :** 41,42p39 (retour à la définition générale de variation)

III. Fonctions de référence

1. Fonctions affines et linéaires

⊛ **Activité :** page 52

Définition Une fonction affine est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

Lorsque $b = 0$, f est une fonction **linéaire** ($f(x) = ax$).
Lorsque $a = 0$, f est une fonction **constante** ($f(x) = b$).

Propriété La fonction affine f est représentée par une droite.
On note que la droite a pour équation $y = ax + b$

Exemple Soit $f : x \longmapsto -2x + 3$.
Pour tracer la courbe représentative de f, qui est une droite puisque f est une fonction affine, il suffit de déterminer deux points de cette droite.
Pour cela, on choisit deux valeurs de x, puis on détermine les images $y = f(x)$. Par exemple :
Si $x = 0$, on a $f(0) = 3$, donc on obtient le point de coordonnées $(0; 3)$.
Si $x = 4$, on a $f(4) = -2 \times 4 + 3 = -8 + 3 = -5$, on obtient donc le point de coordonnées $(4; -5)$.
On place alors les deux points dans un repère, puis la droite passant par ces deux points.

Définition Le nombre a est appelé **coefficient directeur**. Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine** puisque $f(0) = b$.

Propriété Soit $f : x \mapsto ax + b$. Alors quels que soient u et v distincts dans $\mathbb{R}$,

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = a$$

Preuve : On exprime la différence : $f(v) - f(u) = (au + b) - (av + b) = au + b - av - b = au - av = a(v - u)$. Comme u et v sont distincts, $v - u \neq 0$. On peut donc diviser par $(v - u)$, ce qui donne bien : $\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} = a$ □

L'expression $\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u}$ est appelée taux de variation de f entre u et v. Ce taux est donc toujours le même pour une fonction affine, égale au coefficient directeur.

⚠ Ceci n'est vrai que pour une fonction affine.

⚠ Le terme de « coefficient directeur » n'a de sens que pour une fonction affine.

Propriété Soit $f : x \longmapsto ax + b$.
- Si $a > 0$, alors f est croissante.
- Si $a < 0$, alors f est décroissante.

Preuve Dans le cas où $a > 0$:
Soit u et v deux réels tels que $u < v$. Pour prouver que f est croissante, il suffit de prouver que $f(u) < f(v)$ (voir la définition vue en début d'année).
Or $f(u) < f(v) \Leftrightarrow f(u) - f(v) < 0$.
Calculons alors : $f(u) - f(v) = (au + b) - (av + b) = au + b - av - b = au - av = a(u - v)$
Or, comme $u < v$, on a $u - v < 0$. On a supposé de plus que $a > 0$. Par conséquent, le produit $a(u - v)$ est négatif d'après la règle des signes d'un produit.
Autrement dit, $f(u) - f(v) < 0$: f est bien croissante.
Pour le cas où $a < 0$: la preuve est tout à fait similaire sauf qu'il faut prouver cette fois que $f(u) > f(v)$ (une fonction décroissante change le sens de l'inégalité). Cette fois, $a(u - v)$ est positif car c'est le produit de deux nombres négatifs. $\square$

Exemple Soit $g : x \longmapsto \dfrac{-2x + 5}{4}$.
La fonction g est affine. En effet, $g(x) = \dfrac{-2}{4}x + \dfrac{5}{4} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4}$.
Le coefficient directeur est $a = -\dfrac{1}{2}$, donc négatif. Ainsi, g est décroissante.

▶ **Exercices :** 22,23p61 (simplification puis représentation)

▶ **Exercices :** 48,49p62 (variations)

▶ **Exercices :** 1,3p55 (inéquations algébriquement et graphiquement)

▶ **Exercices :** 6,9p56 (signe d'une expression affine)

▶ **Exercices :** 44,45p62 (représentation et inéquations)

▶ **Exercices :** 28 (à résoudre ensemble),30,31p61, 43 (graphiquement, dont un ensemble)p62 (trouver la fonction affine à partir de deux points/images)

2. Fonction carré

⊛ **Activité :** page 66 (manipulation d'expressions avec le carré)

Définition La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Propriété La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ puis strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet pour minimum 0 en $x = 0$.

Tableau de variations
Courbe représentative

Preuve : Prouvons que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Soit donc a et b deux réels positifs tels que $a < b$. On a $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Or, $a - b < 0$ (car $a < b$) et $(a + b) > 0$ (car a et b sont positifs). Donc $a^2 - b^2 < 0$, c'est à dire $a^2 < b^2$. Ainsi la fonction carré respecte l'ordre sur $[0; +\infty[$, autrement dit elle est croissante sur $[0; +\infty[$.
Sur $]-\infty; 0]$: exercice □

Définition On appelle **parabole** la courbe représentative de la fonction carré. Son extremum est appelé le **sommet** de la parabole.

Remarque La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, parce que $f(-x) = f(x)$, autrement dit les points $(-x; x^2)$ et $(x; x^2)$ qui sont sur la courbe sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

► **Exercices :** 17,18,19,20p72 (comparaison de carrés)

► **Exercices :** 23,27p73 (comparaisons un peu plus poussées)

► **Exercices :** 29,30p74 (résolution graphique d'inéquations avec les carrés)

3. Fonction inverse

Définition La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et encore décroissante sur $]0; +\infty[$.

Preuve : Exercice. □

Tableau de variation
Courbe représentative

Définition On appelle la courbe représentative de la fonction inverse une **hyperbole**

Remarque La courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère. En effet, $f(-x) = -f(x)$, donc les points $(-x; -\dfrac{1}{x})$ et $(x; \dfrac{1}{x})$ sont sur la courbe et sont symétriques par rapport à O.

▶ **Exercice :** 1p91

▶ **Exercices :** 5,6p95 (comparaisons)

▶ **Exercices :** 9,10p96 (encadrements)

▶ **Exercices :** 15,16,17p97 (résolutions graphiques d'inéquations)

★ **Approfondissement :** 52p104 (trois fonctions)

IV. Fonctions polynomiales de degré 2

⊛ **Activité :** 1p67 (trajectoire d'un objet lancé, parabole sur calculatrice)

Définition Une fonction polynomiale de degré 2 est une fonction f dont l'expression s'écrit sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des nombres fixés, a étant non nul.

Exemple $f(x) = -2x^2 + 5$; $g(x) = x^2 - 2x + 5$.

Exemple la fonction carré est une fonction polynomiale de degré 2

Définition De même que la fonction carré, la courbe représentative d'une fonction poynomiale de degré 2 est appelée **parabole**, formée de deux **branches** et d'un sommet.

Dessin explicatif

Propriété
- Si $a > 0$, les branches de la parabole sont vers le haut.
- Si $a < 0$, les branches de la parabole sont vers le bas.

Le sommet de la parabole est atteint pour $x = \dfrac{-b}{2a}$

Preuve : Ceci est admis et ne sera démontré qu'en première. □

Tableaux de variation et dessins
(préciser minimum et maximum selon le cas)

Exemple tableaux pour f et g définies plus haut

On peut observer une symétrie de la courbe par rapport à une droite verticale passant par le sommet.

▶ **Exercices :** 39 à 42p77

▶ **Exercices :** 84,85,86p83

V. Fonctions homographique

⊛ **Activité :** 2p91 (recherche d'une longueur revenant à étudier des fonctions homographiques)

Définition On appelle fonction homographique toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

où a, b, c et d sont des constantes, avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Remarque la seconde condition revient à dire que le numérateur n'est pas proportionnel au dénominateur (et donc que $f(x)$ ne peut pas être simplifiée en une constante).

Exemple $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}$; $g(x) = \dfrac{4-x}{x}$

Exemple la fonction inverse est une fonction homographique.

Propriété La fonction homographique est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{-d}{c}\}$.

Preuve : Il faut en effet que $cx + d \neq 0$, donc que $x \neq -\dfrac{d}{c}$. □

Exemple Donner l'ensemble de définition de f et de g.

Définition De même que pour la fonction inverse, la courbe représentative d'une fonction homographique est une hyperbole.

Les variations d'une telle fonction ne sont, en seconde, pas à connaître.

▶ **Exercices :** 18,19,21p98

▶ **Exercice :** 55p104