

On ne sait pas si l'histoire suivante est vraie ou non.  
Le Roi demande à l'inventeur du jeu d'échec de choisir lui-même sa récompense.  
Celui-ci répond (en ce temps-là, on tutoyait les rois) :  
« Place deux grains de blé sur la première case de l'échiquier, quatre grains sur la deuxième, huit sur la troisième, seize sur la quatrième et ainsi de suite. Je prendrai tous les grains qui se trouvent sur l'échiquier. »  
Le Roi sourit de la modestie de cette demande.

En réalité, cette demande était-elle vraiment modeste ?

On rappelle qu'un échiquier est composé d'un quadrillage de huit cases par huit, ce qui fait un total de 64 cases.

1. On numérote les 64 cases de l'échiquier de 1 à 64 et, pour chaque entier  $n$  ( $1 \leq n \leq 64$ ) on note  $u_n$  le nombre de grains de blé que le Roi doit déposer dans la  $n$ -ième case.
  - (a) Calculer  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{10}$ .
  - (b) Comment passe-t-on d'un terme au terme suivant ?
  - (c) Quelle est la nature de la suite  $u$  ?
  - (d) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ . Calculer alors  $u_{64}$ .
  
2. On note  $S$  le nombre total de grains sur l'échiquier. Ainsi,  $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{64}$ .
  - (a) Expliquer pourquoi  $2S = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{64} + 2^{65}$ .
  - (b) En déduire que  $2S - S = 2^{65} - 2$ .
  - (c) Que vaut  $S$  ?
  
3. Pour vérifier si la demande était modeste, on estime qu'un grain de blé pèse  $5 \times 10^{-2}$  grammes et qu'une tonne de blé prend un volume de un mètre cube environ. Quel serait le volume du grenier qui contiendrait le blé gagné par l'inventeur du jeu d'échec ?