Devoir maison n°06 – mathématiques
Donné le 05/02/2013 – à rendre le 12/02/2013

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour densité la fonction f. Soit F la fonction de répartition de X.
Soit x et y deux réels tels que $x < y$. On pose $I =]-\infty; x]$ et $J =]x; y]$.

1. Justifier que les événements « $X \in I$ » et « $X \in J$ » sont incompatibles.
2. En déduire que $F(y) = F(x) + P(x < X \leqslant y)$
3. Qu'en conclut-on sur les variations de la fonction de répartition F ?

Exercice 2
Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire
On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$.

1. (a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Calculer $g(1)$.
2. (a) Déduire du 1. les résultats suivants :
   si $x \geqslant 1$ alors $x^2 + \ln x \geqslant 1$.
   si $0 < x \leqslant 1$ alors $x^2 + \ln x \leqslant 1$.
   (b) Déterminer le signe de l'expression $x^2 + \ln x - 1$ pour x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B. Étude d'une fonction
On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

et on appelle $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$.
2. En utilisant la partie A, donner le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Soit (Δ) la droite d'équation $y = x + 1$. Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) et préciser les coordonnées de leur point d'intersection I.
4. Déterminer les coordonnées du point J de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente (T) est parallèle à la droite (Δ).
5. Tracer (Δ), (T) et $(\mathcal{C})$.