DEVOIR DE TYPE BAC
19 décembre 2012

MATHÉMATIQUES

Série ES

ENSEIGNEMENT
OBLIGATOIRE & DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. L'exercice 2 possède deux versions : une version pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et une autre pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 (5 points - Commun à tous les candidats)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\left(-4x^2+5\right)}{\mathrm{e}^x} + 3$$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

1. (a) Démontrer que pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\left(4x^2-8x-5\right)}{\mathrm{e}^x}$$

   (b) Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. À l'aide de la question précédente, dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise produit de la peinture qu'elle vend ensuite. Toute la production est vendue. Le coût moyen unitaire de cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A :
pour x hectolitres de peinture fabriqués (avec $x \in [0{,}5\ ;\ 8]$), le nombre $f(x)$ désigne le coût moyen unitaire de production par hectolitre de peinture, exprimé en centaines d'euros (on rappelle qu'un hectolitre est égal à 100 litres).
Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle. On pourra utiliser les résultats de la partie A.
Chaque réponse sera justifiée.

1. Déterminer le coût moyen unitaire de production en euros, arrondi à l'euro près, pour une production de 500 litres de peinture.
2. (a) Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire pour minimiser le coût moyen unitaire de production ? Quel est alors ce coût, arrondi à l'euro près ?

   (b) Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100 euros. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'entreprise peut réaliser des bénéfices.

   Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

3. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 300 euros.
   On appelle seuil de rentabilité la quantité à partir de laquelle la production est rentable, c' est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice.
   Quel est le seuil de rentabilité pour cette entreprise ?

Exercice 2 (5 points - Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Un restaurateur propose trois formules à midi.

Formule A **:** Plat du jour/Dessert/Café

Formule B **:** Entrée/Plat du jour/Dessert/Café

Formule C **:** Entrée/Plat du jour/Fromage/Dessert/Café

Lorsqu'un client se présente au restaurant pour le repas de midi, il doit choisir une des trois formules proposées et commander ou non du vin.
Le restaurateur a constaté qu'un client sur cinq choisit la formule A, tandis qu'un client sur deux choisit la formule B.
On sait aussi que :
- Parmi les clients qui choisissent la formule A, une personne sur quatre commande du vin.
- Parmi les clients qui choisissent la formule B, deux personnes sur cinq commandent du vin.
- Parmi les clients qui choisissent la formule C, deux personnes sur trois commandent du vin.

Un client se présente au restaurant pour le repas du midi. On considère les évènements suivants :

A : « Le client choisit la formule A »

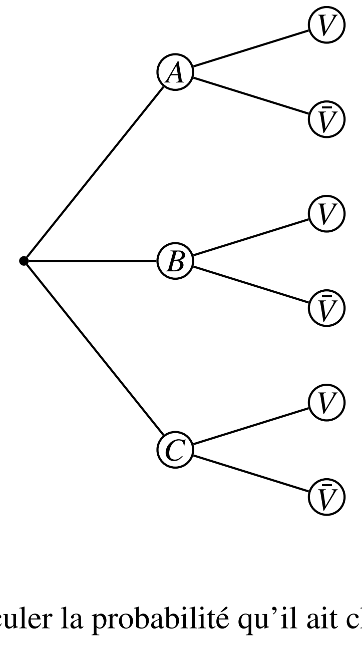
B : « Le client choisit la formule B »

C : « Le client choisit la formule C »

V : « Le client commande du vin »

Si A et B désignent deux évènements d'une même expérience aléatoire, alors on notera $\bar{A}$ l'évènement contraire de A, $p(A)$ la probabilité de l'évènement A, et $p_A(B)$ la probabilité de l'évènement B sachant que A est réalisé.

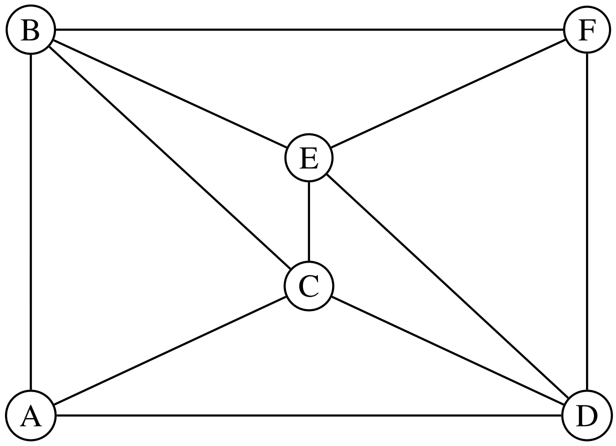
1. Calculer $p(C)$.
2. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous.



3. Montrer que $p(V) = 0{,}45$.
4. Le client commande du vin. Calculer la probabilité qu'il ait choisi la formule A.
5. La formule A coûte 8 euros, la formule B coûte 12 euros et la formule C coûte 15 euros. Le vin est en supplément et coûte 3 euros. On note D la dépense en euro d'un client venant manger le midi au restaurant.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de D.
   (b) Calculer la dépense moyenne par client en euro.

Exercice 2 (5 points - Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

On considère le graphe G suivant :



1. Le graphe G est-il connexe ? Expliquer la réponse.
2. Le graphe G admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une.
3. Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe G. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien ?
4. Le graphe G contient-t-il un sous-graphe complet d'ordre 3 ? Si oui, en donner un exemple en nommant ses sommets.
5. Le graphe G contient-t-il un sous-graphe complet d'ordre 4 ? Si oui, en donner un exemple en nommant ses sommets.
6. Déterminer la matrice M associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).
7. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 & 16 & 6 & 5 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 8 & 11 & 8 & 11 & 11 & 6 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 6 & 11 & 11 & 11 & 8 & 8 \\ 5 & 10 & 6 & 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

   Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet A et aboutissant au sommet F. Citer alors toutes ces chaînes.
8. Combien existe-t-il de cycles de longueurs 3 dans le graphe G ? Expliquer.

Exercice 3 (5 points - Commun à tous les candidats)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $I = [0; 31]$ par

$$f(x) = \frac{x}{x + 1 - \dfrac{1}{100e^x}}$$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations de f sur I. Résumer ces variations dans un tableau dans lequel les valeurs des images seront arrondies au centième.
2. En admettant la conjecture précédente, montrer que sur l'intervalle $[0 ; 31]$ l'équation $f(x) = 0{,}95$ possède une unique solution α puis, à l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à l'entier supérieur par excès de α.

Partie B

L'organisation chargée de vendre les billets pour assister à un événement culturel a mis en vente ces billets un mois avant la soirée de l'événement.
Une étude, portant sur la progression des ventes de ces billets, depuis le premier jour de mise en vente, a permis de modéliser l'évolution des ventes des billets selon la fonction f étudiée dans la partie A.
La proportion des ventes effectuées par rapport à l'ensemble des billets x jours après le début de la mise en vente, est donnée par la valeur $f(x)$, arrondie au centième, pour tout x entier de l'intervalle $[0; 31]$.
Ainsi la valeur approchée de $f(1)$, arrondie au centième, est 0,50 ; cela signifie qu'un jour après le début de la mise en vente des billets, 50% des billets étaient déjà vendus.

1. En utilisant la partie A, déterminer le nombre de jours nécessaires à la vente de 95% de l'ensemble des billets.
2. Quelle est la proportion de billets vendus à la fin du mois ?
3. On considère l'algorithme suivant (la fonction f est celle qui est définie dans la partie A).

Initialisation :	Affecter à X la valeur 3. Affecter à Y la valeur f(X).
Saisie :	Afficher « Entrer un nombre P compris entre 0 et 1 ». Lire P.
Traitement :	Tant que $Y < P$ - Affecter à X la valeur $X + 1$. - Affecter à Y la valeur $f(X)$. Fin du Tant que
Sortie :	Afficher X.

   (a) Si l'utilisateur de cet algorithme choisit 0,8 comme valeur de P, la valeur de sortie de l'algorithme est 4. Que signifie ce résultat pour les organisateurs ?

   (b) Si l'utilisateur de cet algorithme choisit 0,95 comme valeur de P, quelle valeur de X apparaîtra à la sortie de l'algorithme ?

Exercice 4 (5 points - Commun à tous les candidats)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 6] par

$$f(x) = ax + b - \frac{16}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels.}$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle [1 ; 6] et on note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle. La courbe représentative de f, donnée ci-dessous, coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 4 et admet une tangente horizontale au point A de coordonnées (2 ; 4).

1. (a) Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f'(2)$.

   (b) En utilisant deux des quatre résultats de la question 1. a., déterminer les valeurs des réels a et b.

2. On admet que la fonction f est définie sur [1 ; 6] par

$$f(x) = -4x + 20 - \frac{16}{x}.$$

   (a) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 6].

   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 6] en précisant uniquement les valeurs de $f(1)$, $f(2)$ et $f(4)$.

   (c) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [1 ; 6].