LYCÉE ALFRED KASTLER **TES**

2012–2013

Devoir surveillé n°05 – mathématiques

31/01/2013

Exercice 1 (11 points) Une entreprise fabrique un produit chimique. Elle peut en produire x mètres cube chaque jour ; on suppose que x appartient à l'intervalle [1 ; 6].
Le coût total de production C_T, exprimé en milliers d'euros, est fonction de la quantité produite x :

$$C_T(x) = \frac{x^2}{2} + 4\ln x + 5{,}6 \quad \text{pour } x \in [1\ ;\ 6].$$

1. Vérifier que la fonction C_T est strictement croissante sur l'intervalle [1 ; 6].
2. On note $C_M(x)$ le coût moyen de production en milliers d'euros du mètre cube pour une production journalière de x mètres cube, avec $x \in [1\ ;\ 6]$. On rappelle que $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$.
   (a) Écrire l'expression de $C_M(x)$ en fonction de x.
   (b) soit C'_M la fonction dérivée de C_M sur [1; 6].
   Calculer $C'_M(x)$, et vérifier que $C'_M(x) = \dfrac{x^2 - 3{,}2 - 8\ln x}{2x^2}$ pour tout x de l'intervalle [1 ; 6].
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle [1 ; 6] par $f(x) = x^2 - 3{,}2 - 8\ln x$.
   (a) On admet que f est dérivable sur [1 ; 6]. Étudier les variations de f sur [1 ; 6].
   (b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans [2 ; 6] ; déterminer une valeur approchée par excès à 10^{-1} près de α.
   (c) En déduire le signe de $f(x)$ sur [1 ; 6] (on ne demande pas de justification).
4. On prendra pour α la valeur approchée trouvée à la question 3. b.
   (a) En utilisant les résultats de la question 3., étudier le sens de variation de la fonction C_M sur [1 ; 6]. Construire son tableau de variation (arrondir les valeurs au dixième).
   (b) Quel est le coût moyen minimal de production du mètre cube de produit ?

Exercice 2 (7 points) La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur [2; 20].

1. Donner l'expression de la fonction f, densité de probabilité de X.
2. Représenter la fonction f dans un repère. Le choix des unités est laissé libre.
3. Déterminer $P(X > 5)$.
4. Exprimer $P(5 < X < 12)$ sous forme d'intégrale et la calculer.
5. On obtient une valeur de X supérieure à 5.
   Quelle est la probabilité que X soit inférieure à 12 ?

Exercice 3 (2 points) Soit f une fonction positive et intégrable sur $[a; b]$. Soit F la fonction définie sur $[a; b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Selon le cours, quelles sont les propriétés de F ?