Exercice 1 **5 points**

Partie A : Étude d'une fonction

1. (a) $h(x) = g(x) - f(x) = 10^6 \times \dfrac{1}{e^x} - 100(e^x - 45)$. Soit h' la dérivée de h. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x}$ est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = e^x = u'(x)$, et a donc pour dérivée $\dfrac{-u'}{u^2}$ soit $x \mapsto \dfrac{-e^x}{(e^x)^2} = -\dfrac{1}{e^x}$.

   Ainsi, $h'(x) = -10^6 \times \dfrac{1}{e^x} - 100e^x = -\left(\dfrac{10^6}{e^x} + 100e^x\right)$.

   Or quelque soit $x \in [4;6]$, $e^x > 0$, ainsi que les constantes 100 et 10^6. Toute composition de sommes, de produits et de quotients de ces termes est donc positive.

   Ainsi sur $[4;6]$, $h'(x)$ est négatif car l'opposé d'un nombre positif.

   Par conséquent, h est décroissante sur $[4;6]$.

   (b) Dans le tableau de variations on fait apparaître $h(4)$ et $h(6)$.

   (c) D'après les questions précédentes, h est strictement décroissante sur $[4;6]$ et on sait que $h(4) > 0$ et $h(6) < 0$, donc 0 est compris entre $h(4)$ et $h(6)$. De plus, h est continue sur $[4;6]$.

   Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α dans $[4;6]$ tel que $h(\alpha) = 0$.

2. (a) On complète le tableau de valeurs en s'aidant par exemple du tableau de valeurs donné par la calculatrice.

   (b) La courbe est tracée proprement, son comportement doit être « naturel » (et se voit sur la calculatrice).

   (c) Une fois α placé sur le graphique, on peut en donner un **encadrement** : $4{,}8 < \alpha < 4{,}9$.

Partie B : Application économique

1. Le prix unitaire d'équilibre est le nombre x tel que $f(x) = g(x)$, soit tel que $h(x) = 0$. Or d'après la partie A, il existe une unique solution de cette équation sur $[4;6]$, à savoir $\alpha = 3\ln(5)$. Ainsi le prix unitaire d'équilibre est 4,83€ arrondi au centième d'euro.
2. Pour connaître la quantité produite pour ce prix d'équilibre il suffit de calculer $f(\alpha)$, ou ce qui revient au même $g(\alpha)$. Or $g(\alpha) = \dfrac{10^6}{e^{3\ln 5}} = \dfrac{10^6}{5^3} = 8\ 000$ (valeur exacte !). Donc pour le prix d'équilibre, la production est de 8 000 kg.

Exercice 2 **5 points**

Partie A

1. Pour étudier les variations de g on étudie le signe de g'. Or $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ et g est définie sur $[1;+\infty[$. Pour tout $x > 1$, $g'(x) > 0$ (l'inverse d'un nombre positif est positif).

   Par conséquent, g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
2.

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}\ln(e) = \ln(\sqrt{e}) \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{e} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathscr{S} = \{\sqrt{e}\}$.

3. Puisque g est strictement croissante et que $g(\sqrt{e}) = 0$, on a bien $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \sqrt{\mathrm{e}}$.

Partie B

1. (a) f est de la forme $uv + c$ avec $u(x) = 2x^2$, $v(x) = \ln(x) - 1$ et $c = 2$.
   Par suite, $f' = u'v + uv'$. Or, $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Donc $f'(x) = 4x(\ln x - 1) + 2x^2 \times \dfrac{1}{x} = 4x \ln x - 4x + 2x = 4x \ln(x) - 2x$.
   On factorise par $4x$: $f'(x) = 4x\left(\ln(x) - \dfrac{2x}{4x}\right) = 4x\left(\ln(x) - \dfrac{1}{2}\right) = 4xg(x)$.
   (b) On connaît le signe de g grâce à la partie A : $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \sqrt{\mathrm{e}}$. De plus, sur $[1; +\infty[$, $4x > 0$. Donc le signe de f' est celui de g.
   On en conclut que f est décroissante sur $[1; \sqrt{e}]$ puis croissante sur $[\sqrt{e}; +\infty[$.
   Pour le tableau de variations on calcule $f(1) = 0$ et $f(\sqrt{e}) = 2 - e$ (détailler les calculs !)
2. (a) f est continue et strictement croissante sur $[2; 3]$. De plus (détailler !), $f(2) < 0$ et $f(3) > 0$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α dans $[2; 3]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   (b) Un **encadrement** d'amplitude 10^{-2} de α est : $2{,}21 < \alpha < 2{,}22$.

Exercice 3 **5 points**

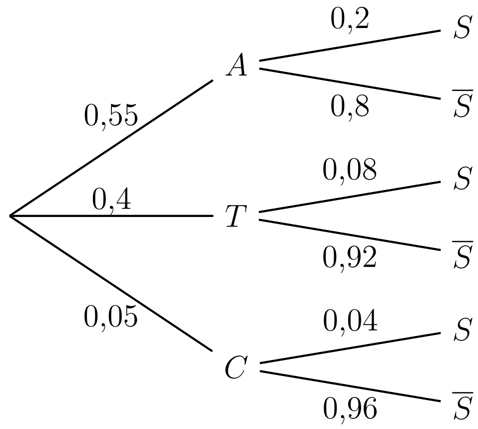
1. (a) Pour tracer la **droite** le plus précisément, déterminer deux points éloignées. Cette droite passe par l'origine, et en $x = 10$ on a $y = 6\,800$.
   On détermine que l'entreprise est bénéficiaire en cherchant l'ensemble des valeurs pour lesquelles la courbe de C est en dessous de la droite, soit sur $[2{,}2; 8{,}4]$. (Même si la lecture est graphique, ne pas se contenter de donner des entiers !)
   (b) On a $B(x) = 680x - C(x) = 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750)$.
   En développant, puis réduisant, on obtient une expression polynomiale simple à dériver.
   On obtient alors bien $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$.
   (c) Pour étudier les variations de la fonction B sur $[0; 10]$, on étudie le signe de B', qui est polynomiale de degré 2. On cherche alors les racines en commençant par calculer le discriminant. On trouve $\Delta = 90000 = 300^2 > 0$ et deux racines, 6 et $-\dfrac{2}{3}$.
   Puisque $a = -45 < 0$, on obtient donc que $B'(x) < 0$ pour $x > 6$ et $B'(x) > 0$ pour $x \in [1; 6]$.
   Par conséquent B est croissante sur $[1; 6]$ puis décroissante sur $[6; 10]$.
   B atteint donc un maximum en $x = 6$ qui vaut $B(6) = 1\,410$
   Le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est donc maximum pour 6km de tissu, et s'élève à 1 410 euros.
2. (a) Graphiquement, la fonction C semble concave sur $[0; 2{,}6]$ et convexe sur $[2{,}6; 10]$. (Là encore, essayer d'être précis : chercher la tangente qui traverse la courbe).
   Le point d'inflexion a une abscisse d'environ 2,6.
   (b) $C'(x) = 45x^2 - 240x + 500$.
   (c) Pour étudier les variations de C', qui est une fonction polynomiale de degré 2, on peut se contenter (au lieu de dériver), de chercher l'abscisse du sommet de la parabole qui la représente.

On a $x = \frac{-b}{2a} = \frac{240}{90} = \frac{8}{3}$. Par suite, $a = 45 > 0$, donc C' est décroissante sur $\left[0; \frac{8}{3}\right]$ puis croissante sur $\left[\frac{8}{3}; 10\right]$.

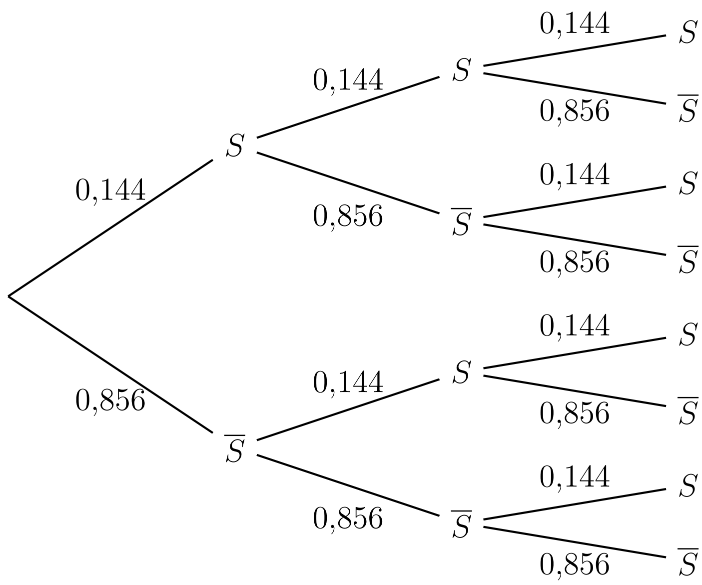
L'abscisse du point d'inflexion correspond à l'abscisse du sommet de la parabole, à savoir $x = \frac{8}{3}$. Cette valeur est proche de 2,6.

Exercice 4 **Obligatoire - 5 points**

1.



2. On nous demande $P(T \cap S) = P(T) \times P_T(S) = 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}032$
3. On nous demande :
$P(S) = P(A \cap S) + P(T \cap S) + P(C \cap S) = 0{,}55 \times 0{,}2 + 0{,}032 + 0{,}05 \times 0{,}04 = 0{,}144.$
4. On nous demande $P_{\overline{S}}(T) = \frac{P(T \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(T) \times P_T(S)}{1 - P(S)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}92}{1 - 0{,}144} \simeq 0{,}430.$
5. On considère le choix au hasard d'un seul dossier. On s'intéresse à l'événement succès S : « le dossier concerne un client ayant souscrit l'assurance multirisque ». On a $P(S) = 0{,}144$. Cette expérience aléatoire est une expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}144$.
On répète cette expérience trois fois de manière indépendante. On se trouve alors dans un schéma de Bernoulli, et l'on considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès. Cette variable suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}144$.
Pour résumer dans un arbre nous sommes dans la situation suivante :



On cherche la probabilité, dans un tirage de trois dossiers au hasard et indépendants, d'obtenir au moins deux dossiers 'S', donc $P(X \geqslant 2)$. Pour ce faire, nous utilisons l'arbre pour compter les branches de même probabilité.
On a $P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3 \times 0{,}144^2 \times 0{,}856 + 1 \times 0{,}144^3 \simeq 0{,}056$.

Exercice 4 **Spécialité - 5 points**

1. Le nombre minimal de jetons nécessaire est le nombre d'arêtes du graphe, soit 9.
2. On souhaite savoir s'il est possible de parcourir tous des chemins sans répétition et en revenant au point de départ. Cela revient à savoir s'il y a un cycle eulérien dans le graphe. Pour répondre à cette question, on établit le fait que tous les sommets sont de degré pair. Ainsi il existe bien un cycle eulérien, donc un trajet permettant d'emprunter tous les chemins une fois et une seule.
3. (a)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Puisqu'il souhaite emprunter au maximum trois chemins, il faut compter les chemins de longueur 1, 2 et 3. Leur nombre se lit à la quatrième ligne (D) et à la deuxième colonne (B) des matrices respectives M, M^2 et M^3. Ainsi, le nombre total de possibilités est $0 + 1 + 3 = 4$.

   (c) Pour donner le trajet correspondant à la distance la plus courte (et le justifier !), on applique l'algorithme de Moore-Dijkstra.

A	B	C	D	E	F
∞	∞	$2(D)$	**0**	∞	$6(D)$
$8(C)$	∞	**2(D)**	|	$6(C)$	$4(C)$
$8(C)$	$14(F)$	|	|	$6(C)$	**4(C)**
$8(C)$	$14(F)$	|	|	**6(C)**	|
8(C)	$10(A)$	|	|	|	|
|	**10(A)**	|	|	|	|

Par suite, le chemin le plus court est $D - C - A - B$ et mesure 10 km.