BAC BLANC
Semaine du 18 au 22 février 2013

MATHÉMATIQUES

Série ES

OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le sujet contient une annexe qui sera à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Exercice 1 **5 points**

Partie A : Étude d'une fonction

On considère les fonctions f, g et h définies et dérivables pour tout nombre réel x de l'intervalle $[4; 6]$ par :

$$f(x) = 100\left(\mathrm{e}^{x} - 45\right), \quad g(x) = 10^{6}\mathrm{e}^{-x} \text{ et } h(x) = g(x) - f(x).$$

On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[4\,;\,6]$.

Résolution de l'équation $h(x) = 0$.

1. (a) Démontrer que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $[4\,;\,6]$.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction h.
   (c) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[4\,;\,6]$.
2. (a) Compléter le tableau de valeurs donné en annexe (les résultats seront arrondis à la centaine la plus proche).
   (b) Sur la figure fournie en annexe, tracer la courbe représentative C_h de la fonction h dans le plan muni d'un repère orthogonal.
   (c) Placer α sur ce graphique et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la valeur exacte du nombre réel α est égale à $3\ln 5$ *où* ln *désigne la fonction logarithme népérien.*

Partie B : Application économique

Les fonctions f et g définies dans la partie A modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit de prix unitaire x, compris entre 4 et 6 euros :

- $f(x)$ est la quantité, en kilogrammes, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire x ;
- $g(x)$ la quantité, en kilogrammes, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire x.

On appelle prix unitaire d'équilibre du marché la valeur de x pour laquelle l'offre est égale à la demande.

1. Quel est, exprimé au centime d'euro près, le prix unitaire d'équilibre du marché ? Justifier.
2. Quelle quantité de produit, exprimée en kilogrammes, correspond à ce prix unitaire d'équilibre ?

Exercice 2 **5 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{2}.$$

1. Étudier les variations de g sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans $[1\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire que $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \sqrt{\mathrm{e}}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2x^2(\ln x - 1) + 2.$$

1. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   (a) Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 4xg(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. (a) Montrer que, dans l'intervalle $[2\ ;\ 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α.
   (b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Exercice 3 **5 points**

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

En annexe est donnée la représentation de la fonction C sur $[0; 10]$.

Le prix de vente d'un kilomètre de ce tissu est 680 euros, la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est alors égale à $R(x) = 680x$.

1. (a) Tracer sur le graphique de l'annexe la droite D d'équation $y = 680x$.
   Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice.
   (b) On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par

   $$B(x) = 680x - C(x).$$

   Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ on a :

   $$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180.$$

   (c) Étudier les variations de la fonction B sur $[0\ ;\ 10]$.
   En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.
2. (a) Par lecture graphique sur la figure de l'annexe, étudier la convexité de la fonction C sur $[0; 10]$.
   Donner une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion.
   (b) Calculer la dérivée C' de C sur $[0; 10]$.
   (c) Étudier les variations de C', en déduire la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

Exercice 4 **Obligatoire - 5 points**

À l'occasion d'un festival culturel, une agence de voyages propose trois types de transport pour permettre à chaque client de se rendre dans la ville organisatrice afin d'assister à la cérémonie d'ouverture.
Les trois moyens de transport proposés sont l'avion, le train ou le car.
À chacun des clients qui achètent un billet de transport, l'agence propose de souscrire une assurance multirisque qui permet, sous certaines conditions, une indemnisation en cas de retard ou de vol de bagages.

Une enquête montre que 55 % des clients choisissent l'avion, que 40 % choisissent le train et que les autres choisissent le car.
De plus, parmi les clients ayant choisi l'avion, 20 % ont souscrit l'assurance multirisque ; ils sont 8 % à choisir cette assurance parmi ceux qui ont choisi le voyage en train et seulement 4 % parmi ceux qui ont choisi le car.

On prend au hasard le dossier d'un client qui se rendra à la cérémonie d'ouverture du festival, chaque dossier ayant la même probabilité d'être choisi.
On note :

- A l'événement : « Le client a acheté un billet d'avion » ;
- T l'événement : « Le client a acheté un billet de train » ;
- C l'événement : « Le client a acheté un billet de car » ;
- S l'événement : « Le client a souscrit une assurance multirisque » et $\overline{\text{S}}$ son événement contraire.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que le dossier choisi soit celui d'un client qui voyagera en train et qui a souscrit une assurance multirisque. On donnera la valeur exacte de cette probabilité.
3. Montrer que la probabilité de l'événement S est égale à 0,144.
4. On prend un dossier au hasard parmi les clients n'ayant pas souscrit une assurance multirisque.
   Calculer la probabilité que ce dossier soit celui d'un client voyageant en train. Le résultat sera donné arrondi au millième.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On choisit trois dossiers au hasard, indépendamment les uns des autres.
   Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au moins deux des dossiers concernent un client ayant souscrit l'assurance multirisque.

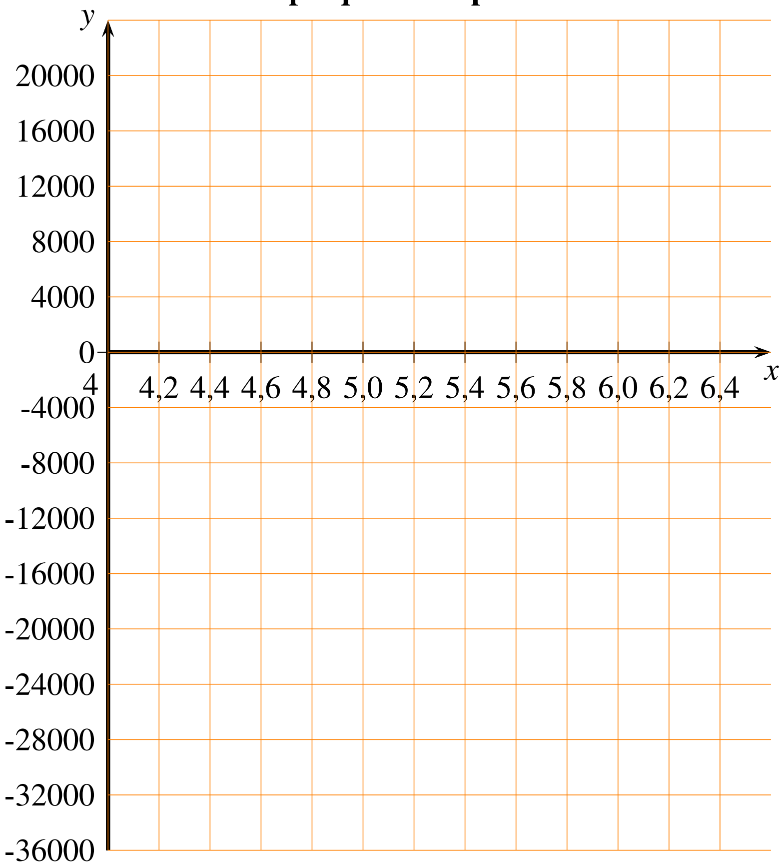
Annexe à rendre avec la copie

exercice 1

Tableau à compléter

x	4	4,2	4,4	4,6	4,8	5	5,2	5,4	5,6	5,8	6
$h(x)$	17 400					$-3\,600$	$-8\,100$			$-25\,500$	$-33\,400$

Graphique à compléter



exercice 3