BAC BLANC
Semaine du 18 au 22 février 2013

MATHÉMATIQUES

Série ES

SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le sujet contient une annexe qui sera à rendre avec la copie.**

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Exercice 1 **5 points**

Partie A : Étude d'une fonction

On considère les fonctions f, g et h définies et dérivables pour tout nombre réel x de l'intervalle $[4;6]$ par :

$$f(x) = 100\left(\mathrm{e}^{x} - 45\right), \; g(x) = 10^{6}\mathrm{e}^{-x} \text{ et } h(x) = g(x) - f(x).$$

On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[4\,;\,6]$.

Résolution de l'équation $h(x) = 0$.

1. (a) Démontrer que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $[4\,;\,6]$.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction h.
   (c) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[4\,;\,6]$.
2. (a) Compléter le tableau de valeurs donné en annexe (les résultats seront arrondis à la centaine la plus proche).
   (b) Sur la figure fournie en annexe, tracer la courbe représentative C_h de la fonction h dans le plan muni d'un repère orthogonal.
   (c) Placer α sur ce graphique et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la valeur exacte du nombre réel α est égale à $3\ln 5$ *où* ln *désigne la fonction logarithme népérien.*

Partie B : Application économique

Les fonctions f et g définies dans la partie A modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit de prix unitaire x, compris entre 4 et 6 euros :

- $f(x)$ est la quantité, en kilogrammes, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire x ;
- $g(x)$ la quantité, en kilogrammes, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire x.

On appelle prix unitaire d'équilibre du marché la valeur de x pour laquelle l'offre est égale à la demande.

1. Quel est, exprimé au centime d'euro près, le prix unitaire d'équilibre du marché ? Justifier.
2. Quelle quantité de produit, exprimée en kilogrammes, correspond à ce prix unitaire d'équilibre ?

Exercice 2 **5 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{2}.$$

1. Étudier les variations de g sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans $[1\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire que $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \sqrt{\mathrm{e}}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2x^2(\ln x - 1) + 2.$$

1. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   (a) Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 4xg(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. (a) Montrer que, dans l'intervalle $[2\,;\,3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α.
   (b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Exercice 3 **5 points**

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule

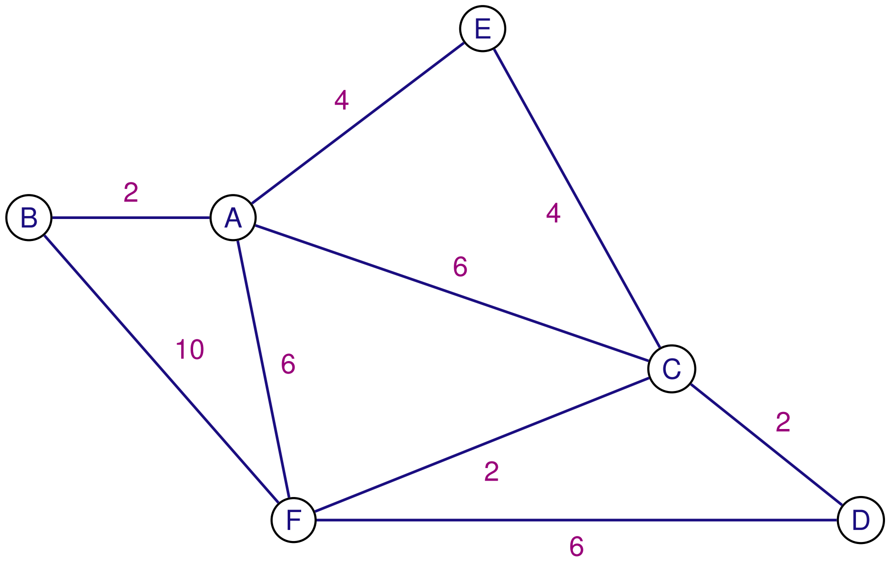
$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

En annexe est donnée la représentation de la fonction C sur $[0; 10]$.
Le prix de vente d'un kilomètre de ce tissu est 680 euros, la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est alors égale à $R(x) = 680x$.

1. (a) Tracer sur le graphique de l'annexe la droite D d'équation $y = 680x$.
   Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice.
   (b) On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;\ 10]$ par
   $$B(x) = 680x - C(x).$$
   Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,10]$ on a :
   $$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180.$$
   (c) Étudier les variations de la fonction B sur $[0\,;\,10]$.
   En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.
2. (a) Par lecture graphique sur la figure de l'annexe, étudier la convexité de la fonction C sur $[0; 10]$.
   Donner une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion.
   (b) Calculer la dérivée C' de C sur $[0; 10]$.
   (c) Étudier les variations de C', en déduire la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

Exercice 4 **Spécialité - 5 points**

Une association organise un rallye sportif en VTT : six zones de regroupement sont déterminées et sont reliées par des chemins.
Ce parcours est modélisé par le graphe ci-dessous, où les sommets de A à F représentent les zones de regroupement, et les arêtes les chemins.
Les arêtes sont pondérées par les distances, exprimées en kilomètres, nécessaires pour parcourir ces chemins.
Les candidats sont positionnés initialement sur la zone A et doivent, après avoir parcouru tous les chemins, revenir à la zone initiale.
Chaque fois qu'un candidat emprunte pour la première fois un chemin il doit déposer, à un endroit précis, un jeton personnalisé, attestant son passage.



1. Quel nombre minimal de jetons est-il nécessaire de donner à chaque candidat ?
2. Un candidat souhaite faire le parcours, en empruntant tous les chemins une fois et une seule. Est-ce possible ? Justifier la réponse.
3. Soit M la matrice associée au graphe G (on ordonne les sommets dans l'ordre alphabétique).
   (a) Écrire la matrice M.
   (b) On donne les matrices

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 9 & 4 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 6 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

   Un candidat est actuellement au point de rendez-vous D et on lui signale qu'il a oublié son dossard au point B. Devant le récupérer, il souhaite emprunter au maximum trois chemins. Combien a-t-il de possibilités ?
   (c) Donner, le trajet correspondant à la distance la plus courte lui permettant d'aller récupérer son dossard.

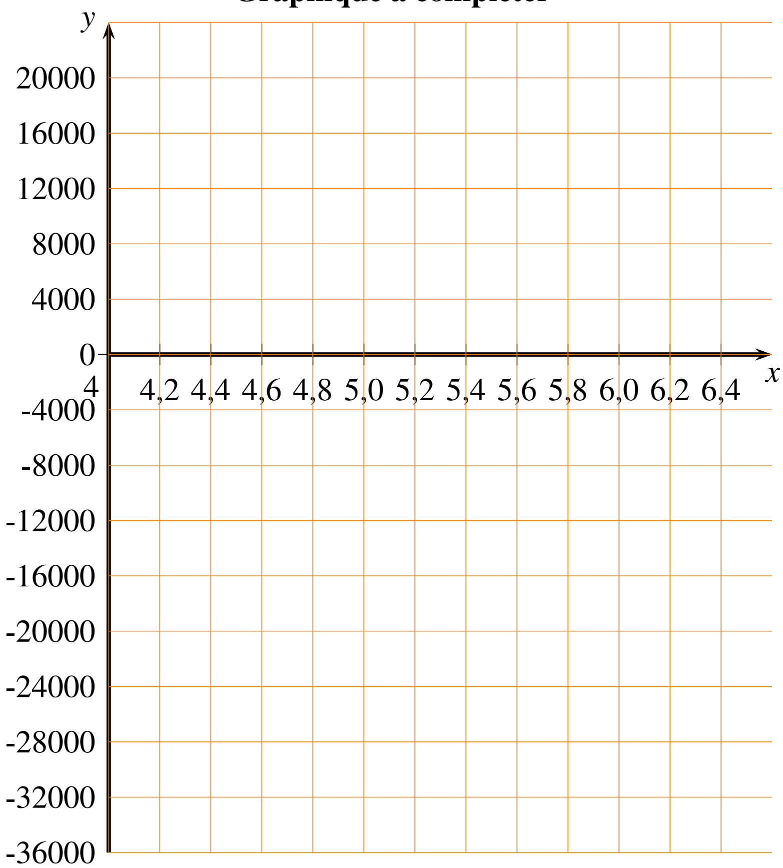
Annexe à rendre avec la copie

exercice 1

Tableau à compléter

x	4	4,2	4,4	4,6	4,8	5	5,2	5,4	5,6	5,8	6
$h(x)$	17 400					−3 600	−8 100			−25 500	−33 400

Graphique à compléter



exercice 3