LYCÉE ALFRED KASTLER **TES**
2012–2013

Devoir surveillé n°07 – mathématiques
09/04/2013

Un point sur le barème est consacré à la notation de la propreté et de la rédaction.

Exercice 1 (7 points) On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	2		3		10		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	6	↘	-5	↗	4

On suppose de plus que $f(5) = 0$ et que $f'(5) = -2$.

1. À l'aide des données ci-dessus, répondre aux questions suivantes.
   (a) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
   (b) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 5.
   (c) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -5$ sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$?
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$.
   (a) Donner la valeur exacte de $g(10)$.
   (b) Déterminer le sens de variations de g sur l'intervalle $[3\ ;\ 10]$, en justifiant la réponse.
   (c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 5.

Exercice 2 (7 points) Le but de cet exercice est d'étudier le coût de fabrication d'un produit « alpha » fabriqué par une entreprise. Toute l'étude porte sur un mois complet de production.
Le coût marginal de fabrication du produit « alpha » par l'entreprise est modélisé par la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1\,;\,20]$ par :

$$C_m(q) = 4 + \left(0{,}2q^2 - 2q\right)\mathrm{e}^{-0{,}2q}$$

q étant la quantité exprimée en tonnes et $C_m(q)$ son coût exprimé en milliers d'euros.

1. La fonction coût total est modélisée par la fonction C_T définie sur l'intervalle $[1\,;\,20]$ par :

$$C_T(q) = 4q - q^2\mathrm{e}^{-0{,}2q}.$$

   Vérifier que cette fonction C_T est une primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[1\,;\,20]$.

2. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,20]$ par :

$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}.$$

   (a) Vérifier que $C_M(q) = 4 - q\mathrm{e}^{-0{,}2q}$.
   (b) Déterminer la fonction dérivée C'_M de la fonction C_M.
   (c) Pour quelle production mensuelle q_0 (exprimée en tonnes) l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal ?
   Quel est ce coût ? Pour cette production q_0, quelle est la valeur du coût marginal ?

Exercice 3 (5 points) Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. $\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)}{\ln 16}$ est égal à :
   (a) $2\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)$
   (b) $\dfrac{1}{2\ln 2}$
   (c) $2\ln \mathrm{e} - \ln\ 16$
2. Soit f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$.
   (a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-2}$
   (b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$
   (c) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x+1}$
3. On donne le tableau de variation d'une fonction g définie et continue sur l'intervalle $[-5\ ;\ 12]$.

x	-5		2		8		12
$g(x)$	-3	↘	-8	↗	1	↘	0

   (a) $\displaystyle\int_8^{12} g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4$.
   (b) L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-5\ ;\ 12]$.
   (c) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[-5\ ;\ 12]$, $e^{g(x)} \leqslant 1$.
4. Soit $f : x \mapsto 6x^2 + 4x$. Alors une primitive de f est donnée par :
   (a) $F(x) = 2x^2(x+1)$
   (b) $F(x) = 12x + 4$
   (c) $F(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5$
5. La fonction h admet une primitive H dont la courbe est donnée ci-dessous.

   Quel renseignement peut-on obtenir sur h ?
   (a) h est croissante sur $]0; 5[$.
   (b) h est négative sur $]0; 0{,}5]$.
   (c) h est décroissante sur $]0; 0{,}5]$.