Devoir surveillé n°07 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) Puisque, d'après la tableau de variation, $f'(3) = 0$, la courbe admet une tangente horizontale, d'équation $y = f(3)$ soit $y = 6$.
   (b) On utilise ici la formule complète de l'équation d'une tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ (à ne pas oublier !). Ici $a = 5$, et on a $f'(5) = -2$ et $f(5) = 0$.
   Donc l'équation est $y = -2(x - 5) + 0$, soit $y = -2x + 10$.
   (c) L'équation $f(x) = -5$ a deux solutions sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$:
   une entre 2 et 3 grâce au théorème des valeurs intermédiaire, et $x = 10$.
2. (a) $g(10) = e^{f(10)} = e^{-5}$.
   (b) Puisque $g = e^f$, g a les mêmes variations que f. Ainsi, g est décroissante sur $[3; 10]$.
   (c) L'équation est $y = g'(5)(x - 5) + g(5)$. Or $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ (formule de cours). Ainsi, l'équation est $y = f'(5)e^{f(5)}(x - 5) + e^{f(5)} = -2e^0(x - 5) + e^0 = -2(x - 5) + 1$, soit $y = -2x + 11$.

Exercice 2

1. Il suffit de vérifier que ${C_T}'(x) = C_m(x)$.
   Or C_T est de la forme $u - v \times w$ avec $u(q) = 4q$, $v(q) = q^2$ et $w(q) = e^{-0{,}2q}$.
   La fonction w est de la forme e^f avec $f(q) = -0{,}2q$.
   Par suite, $u'(q) = 4$, $v'(q) = 2q$, $f'(q) = -0{,}2$ puis $w'(q) = f'(q)e^{f(q)} = -0{,}2e^{-0{,}2q}$.
   Enfin,

$$
\begin{aligned}
{C_T}'(q) &= u'(q) - (v'w + vw')(q) \\
&= 4 - \left(2qe^{-0{,}2q} + q^2 \times (-0{,}2)e^{-0{,}2q}\right) \\
&= 4 - (2q - 0{,}2q^2)e^{-0{,}2q} \\
&= 4 + (0{,}2q^2 - 2q)e^{-0{,}2q} \\
&= C_m(q)
\end{aligned}
$$

2. (a)

$$
\begin{aligned}
C_M(q) &= \frac{C_T(q)}{q} \\
&= \frac{4q - q^2\mathrm{e}^{-0{,}2q}}{q} \\
&= 4 - q\mathrm{e}^{-0{,}2q}
\end{aligned}
$$

   Ce qu'il fallait démontrer

(b) $q \mapsto q\mathrm{e}^{-0,2q}$ est de la formule vw avec $v(q) = q$, $v'(q) = 1$ et w la même que définie précédemment.
Par suite, ${C_M}'(q) = -(v'w + vw')(q) = -\left(e^{-0,2q} - q \times 0{,}2e^{-0,2q}\right)$, soit
${C_M}'(q) = (0{,}2q - 1)e^{-0,2q}$.

(c) Rechercher le coût moyen minimal, c'est chercher le minimum de C_M. Pour cela on étudie donc les variations de C_M. Pour cela on étudie alors le signe de ${C_M}'$.
Or ${C_M}'(q) = (0{,}2q - 1)e^{-0,2q}$ et quelque soit q, $e^{-0,2q} > 0$.
Donc ${C_M}'(q)$ est du signe de $0{,}2q - 1$.
On résout : $0{,}2q - 1 > 0 \Leftrightarrow q > \dfrac{1}{0{,}2} \Leftrightarrow q > 5$.
Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

q	1		5		20
Signe de ${C_M}'$		$-$	0	$+$	
variations de C_M	$4 - e^{-0,2}$	$\searrow$	$4 - \dfrac{5}{e}$	$\nearrow$	$4 - 20e^{-4}$

C'est donc pour $q_0 = 5$ tonnes que l'entreprise a un coût moyen minimal.
Le coût est de $4 - \dfrac{5}{e} \simeq 2{,}161$ milliers d'euros.
Finalement, la valeur du coût marginal est alors $C_m(q_0) = C_m(5) \simeq 2{,}161$ milliers d'euros également.
Cela signifie grossièrement que pour augmenter la production d'une tonne, le coût de production augmenterait de ce coût minimum.
C'est un cas très particulier.

Exercice 3

1. $\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)}{\ln 16} = \dfrac{\ln(e^2)}{\ln(2^4)} = \dfrac{2\ln(e)}{4\ln(2)} = \dfrac{1}{2\ln(2)}$ (car $\ln(e) = 1$).
La bonne réponse est donc (b).
2. Si $f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$, alors $f'(x) = -2e^{-2x+1}$ (c'est la forme $(e^u)' = u'e^u$).
La bonne réponse est donc (c).
3. L'intégrale est une aire inférieure à celle d'un rectangle de largeur 4 et de hauteur 1.
La bonne réponse est donc (a)
4. Si $f : x \mapsto 6x^2 + 4x$. Alors on vérifie que $F : x \mapsto 2x^2(x+1)$ est une primitive de f en vérifiant que $F'(x) = f(x)$. Pour cela, on peut écrire $F(x) = 2x^3 + 2x^2$.
La bonne réponse est donc (a).
5. Puisque la courbe est celle de H, primitive h, et puisque H est décroissante sur $]0; 0{,}5]$, on obtient que h, dérivée de H, est négative sur $]0; 0{,}5]$.
La bonne réponse est donc (b).