15 mai 2013

MATHÉMATIQUES

Série ES

OBLIGATOIRE & SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il y a deux énoncés pour l'exercice 4, le candidat traitera l'exercice selon sa spécialité.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Exercice 1 **4 points**

Chaque jour, Paul joue à un jeu en ligne nécessitant 4 partenaires.

1. Quand Paul se connecte sur le site du jeu, le temps T (en secondes) nécessaire à la constitution d'une équipe de 4 joueurs est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; 60]$.
   (a) Déterminer la probabilité pour que l'équipe soit constituée au bout de 20 secondes.
   (b) Déterminer la probabilité pour que l'équipe ne soit pas encore constituée au bout de 50 secondes.
   (c) Calculer l'espérance mathématique de T. Que représente ce nombre ?
2. Une fois l'équipe constituée, le jeu commence. La durée d'une partie en minutes définit une variable aléatoire X, suivant la loi normale $\mathcal{N}(30; 100)$. Déterminer, à 0,001 près la probabilité pour que la partie dure :
   (a) entre 20 et 40 minutes ;
   (b) moins de 20 minutes ;
   (c) moins de 40 minutes sachant qu'elle a duré plus de 20 minutes.

Exercice 2 **5 points**

1. Calculer la somme $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^9} = \sum_{i=0}^{9} \frac{1}{2^i}$.
2. Soit u la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par $u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   (a) Quel est le sens de variation de cette suite ?
   (b) Quelle est la limite de cette suite ?
   (c) Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel n_0 tel que, si $n \geqslant n_0$, alors $u_n < 10^{-4}$.
3. Voici ci-contre un algorithme.
   (a) Quelles sont les valeurs successives prises par A ?
   (b) Que représente le nombre I affiché à la fin ?

```
Variables
    A,I
Traitement
    A prend la valeur 7
    I prend la valeur 0
    Tant que A > 10^(-40) Faire
        I prend la valeur I+1
        A prend la valeur A × 1/2
    FinTant
Sortie
    Afficher I
```

4. Un enfant fait des ricochets avec des cailloux. Il est au bord d'une rivière de 15 mètres de largeur. Le premier ricochet a lieu à 7 mètres du point de départ ; ensuite la distance entre deux ricochets est divisée par 2 d'un ricochet à l'autre.
   (a) Calculer la distance parcourue par le caillou au bout de dix ricochets.
   (b) L'enfant peut-il espérer que sa pierre atteigne l'autre rive ? Justifier.

Exercice 3 **6 points**

Partie A

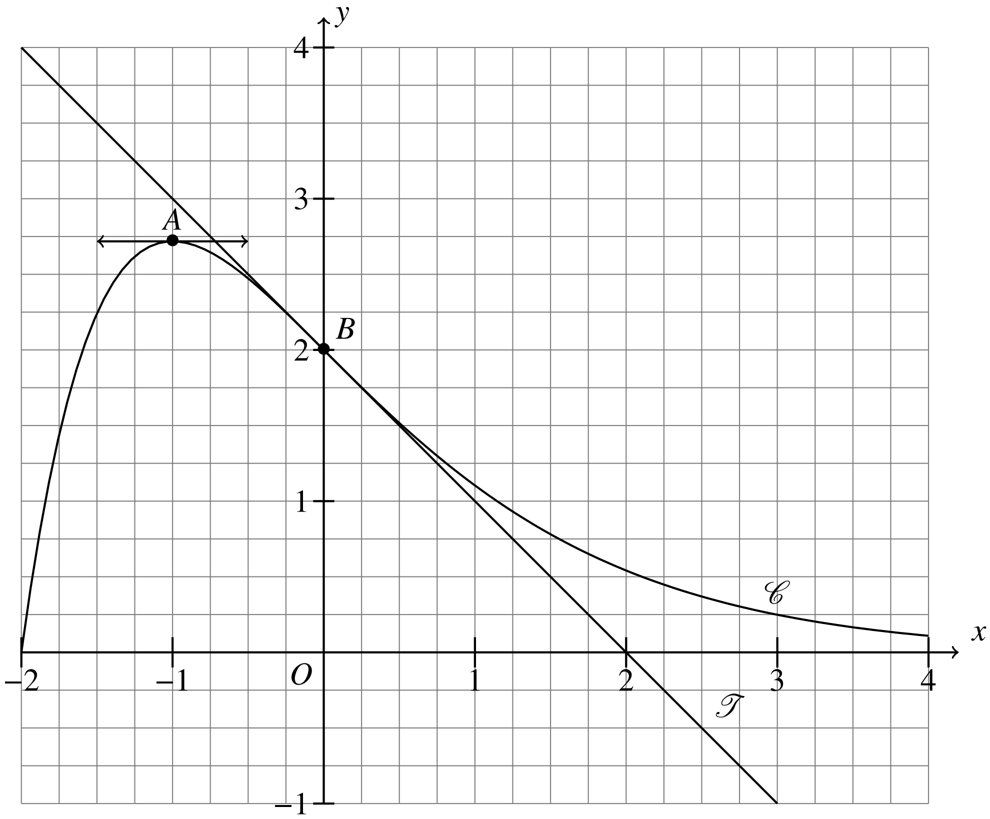
On donne ci-dessous, dans un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$, la courbe représentative de $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

On nomme A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1 et B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.

– La fonction f est strictement croissante sur $[-2\ ;\ -1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$.

– La tangente à $\mathscr{C}$ au point A est horizontale.

– La droite $\mathscr{T}$ est la tangente à $\mathscr{C}$ et a pour équation $y = -x + 2$.



Pour chacune des questions qui suivent, toute réponse sera justifiée.

1. (a) Donner la valeur de $f'(-1)$.
   (b) Déterminer le signe de $f'(2)$.
   (c) Interpréter graphiquement $f'(0)$, puis donner sa valeur.
2. Encadrer, avec deux entiers consécutifs, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ exprimée en unités d'aire.

Partie B

La fonction de la **partie A** a pour expression $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Justifier par le calcul le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.
3. Montrer que la fonction F définie sur $[-2\ ;\ 4]$ par $F(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f.
4. (a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) Vérifier la cohérence de ce résultat avec celui de la question 2. de la partie A.

Exercice 4 **Spécialité - 5 points**

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

On étudie ici la propagation d'une information d'une personne à l'autre, thème souvent abordé en sciences sociales. Cette information se transmet avec un risque d'erreur, c'est-à-dire avec une probabilité de propagation de l'information contraire.

On considère l'information suivante, notée E : « Paul a réussi son examen ».

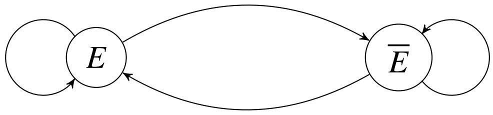
Partie A : Propagation symétrique (de type « neutre »)

Dans cette partie, on suppose que, pour une information reçue (E ou $\overline{E}$), la probabilité de communiquer cette information à l'identique vaut 0,9 et la probabilité de relayer l'information contraire vaut 0,1.

On note p_n la probabilité de recevoir l'information E au bout de n étapes (n étant le nombre de personnes ayant transmis l'information) et on note q_n la probabilité de recevoir l'information $\overline{E}$ au bout de n étapes.

On suppose que Paul a réussi son examen, on pose $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Recopier puis compléter le graphe probabiliste relatif à la propagation de l'information suivant :



2. Préciser la matrice de transition M telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} M$.
3. À l'aide de la calculatrice, trouver le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0{,}8$.
4. Déterminer, par le calcul, l'état stable.

Partie B : Propagation asymétrique (de type « rumeur »)

Dans cette partie, on suppose toujours que la probabilité de transmission correcte de l'information E est égale à 0,9. Toutefois, il circule la fausse rumeur $\overline{E}$. Dans ces conditions, on suppose que si l'information reçue est $\overline{E}$, la probabilité de transmettre cette information $\overline{E}$ est égale à 1.
On suppose de nouveau que $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Préciser la matrice de transition N telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} N$.
3. Montrer que $p_{n+1} = 0{,}9 p_n$. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
4. Exprimer p_n en fonction de n.
5. Trouver par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0{,}5$.
6. Déterminer la limite de (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$ puis interpréter le résultat obtenu.

Exercice 4 **Obligatoire - 5 points**

Un sondage a été effectué auprès des anciens élèves d'un lycée quelques années après l'obtention de leur baccalauréat. Ce sondage révèle que 55% d'entre eux poursuivent leurs études à la faculté, 10% ont intégré une école d'ingénieur et les autres sont sur le marché du travail (en activité ou en recherche d'emploi).
Ce sondage révèle aussi que :
– 45% des anciens élèves qui poursuivent leurs études à la faculté ont fait le choix de vivre en colocation.
– 30% des anciens élèves qui ont intégré une école d'ingénieur ont fait le choix de vivre en colocation.
– 15% des anciens élèves sur le marché du travail ont fait le choix de vivre en colocation.
On interroge au hasard un ancien élève du lycée et on définit les événements :
F : « l'ancien élève poursuit ses études à la faculté » ;
I : « l'ancien élève a intégré une école d'ingénieur » ;
T : « l'ancien élève est sur le marché du travail » ;
C : « l'ancien élève vit en colocation ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. (a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $F \cap C$ puis calculer la valeur exacte de sa probabilité.
   (b) Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0,33.
3. Un ancien élève vit en colocation. Calculer la probabilité qu'il poursuive ses études à la faculté.
4. Le responsable du sondage affirme : « Plus de la moitié des élèves n'ayant pas fait le choix de la colocation poursuivent des études ».

   Cette affirmation est-elle correcte ? Justifier.
5. On interroge au hasard trois anciens élèves. On suppose que le nombre d'anciens élèves est suffisamment important pour considérer que ce choix est fait de manière indépendante.

   Calculer la probabilité pour qu'au moins un des anciens élèves vive en colocation. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.