Devoir surveillé n°08 – mathématiques
(Type bac)
Correction

Exercice 1

1. (a) La probabilité pour que l'équipe soit constituée au bout de 20 secondes est :
   $\mathbb{P}(0 \leqslant T \leqslant 20) = \dfrac{20-0}{60-0} = \dfrac{1}{3}$.

   (b) La probabilité pour que l'équipe ne soit pas encore constituée au bout de 50 secondes est :
   $\mathbb{P}(50 \leqslant T \leqslant 60) = \dfrac{60-50}{60-0} = \dfrac{1}{6}$.

   (c) L'espérance mathématique de T est $\dfrac{0+60}{2} = 30$.
   Cela signifie qu'en moyenne, le temps d'attente pour constituer l'équipe est de 30 secondes.

2. On a $\mu = 30$ et $\sigma = \sqrt{100} = 10$.
   Les calculs suivants sont faits à l'aide de la calculatrice.

   (a) La probabilité que la partie dure entre 20 et 40 minutes est : $\mathbb{P}(20 \leqslant X \leqslant 40) \simeq 0{,}683$.

   (b) La probabilité que la partie dure moins de 20 minutes est :
   $\mathbb{P}(X \leqslant 20) = 0{,}5 - \mathbb{P}(20 \leqslant X \leqslant 30) \simeq 0{,}5 - 0{,}341 \simeq 0{,}159$

   (c) La probabilité que la partie dure moins de 40 minutes sachant qu'elle a duré plus de 20 minutes est :
   $\mathbb{P}_{X>20}(X < 40) = \dfrac{\mathbb{P}(20 < X < 40)}{1 - \mathbb{P}(X \leqslant 20)} \simeq \dfrac{0{,}683}{1-0{,}159} \simeq 0{,}812$

Exercice 2

1. la somme $S = \displaystyle\sum_{i=0}^{9} \frac{1}{2^i}$ est la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique de terme général $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.
   On utilise alors la formule de cours :
   $$S = u_0 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = 1 \times \frac{\frac{2^{10}-1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2^{10}-1}{2^9} = \frac{1023}{512} \simeq 1{,}998$$

2. D'après notre définition de v, on a $u = 7v$.

   (a) La suite u est géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.
   Donc elle est positive et $0 < q < 1$, donc u est strictement décroissante.

   (b) Avec les mêmes arguments que la question précédente, on conclut également que
   $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

   (c) À l'aide de la calculatrice, on obtient que le plus petit entier naturel recherché est $n_0 = 17$.
   En effet, $u_{16} \simeq 1{,}068 \times 10^{-4}$ et $u_{17} \simeq 5{,}34 \times 10^{-5}$.

3. (a) Les valeurs successives prises par A sont celles des termes de la suite u. En effet la première est 7 qui est u_0, puis on multiplie à chaque étape par $\dfrac{1}{2}$, donc par q.

(b) Le nombre I affiché à la fin est le plus petit entier n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \leqslant 10^{-40}$.

4. (a) La distance parcourue par le caillou au bout de dix ricochets est le résultat de la somme suivante : $D = 7 + \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \cdots + \frac{7}{2^9}$. En factorisant par 7, on observe alors que la distance D vaut $7S$ (S étant la somme calculée à la première question de l'exercice). On a donc $D = 7S = 7 \times \frac{1023}{512} \simeq 13{,}986$ m.

   (b) De manière similaire, la distance parcourue au bout de n ricochets est donnée par :
   $D_n = 7 \times \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} = 7 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$.
   Lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$, on obtient la distance suivante :
   $D_{max} = 7 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 7 \times 2 = 14$.
   Or la rivière a une largeur de 15 mètres qui est supérieure 14 m ; la pierre n'atteindra pas l'autre rive.

Exercice 3

Partie A

1. (a) $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1. Or d'après l'énoncé, la tangente est horizontale. Donc $f'(-1) = 0$.

   (b) Puisque f est décroissante sur $[-1; 4]$, $f'(2)$ est négative.

   (c) $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -0, autrement dit de $\mathscr{T}$. Comme, d'après l'énoncé, l'équation de cette droite est $y = -x + 2$, on a $f'(0) = -1$.

2. L'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire située sous la courbe de $\mathscr{C}$ et délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$. Elle est encadrée par les aires de deux rectangles de largeur 1 et de hauteur respective 2 et 3. Autrement dit,

$$2 < \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x < 3$$

Partie B

1. A étant sur la courbe $\mathscr{C}$ et ayant pour abscisse -1, l'ordonnée du point A est :
   $f(-1) = (-1 + 2)e^{-(-1)} = 1e^1 = e$.

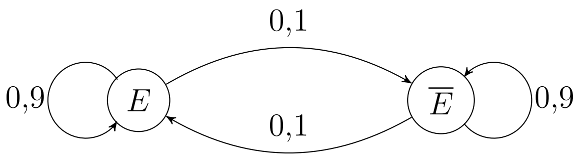
2. Pour justifier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$, il faut calculer la dérivée de f. Or f est de la forme $v \times e^u$ avec $v(x) = x + 2$ et $u(x) = -x$.
   Donc $f' = v'(e^u) + v(e^u)' = v'e^u + vu'e^u$.
   Or $v'(x) = 1$ et $u'(x) = -1$.
   Donc $f'(x) = e^{-x} + (x+2)(-1)e^{-x} = e^{-x}(1 - x - 2) = e^{-x}(-x - 1)$.
   Puisque $e^{-x} > 0$ pour tout x réel, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x-1$. Or $-x-2 > 0 \Leftrightarrow x < -1$.
   Par conséquent on a bien le tableau suivant :

x	-2		-1		4
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$6e^{-4}$

3. Il suffit de vérifier que la dérivée de F est f.
   F est de la forme ve^u avec $v(x) = -x - 3$ et $u(x) = -x$. On a $v'(x) = -1$ et $u'(x) = -1$.
   Avec la même formule que précédemment on obtient :
   $F'(x) = -e^{-x} + (-x-3)(-1)e^{-x} = e^{-x}(-1 + x + 3) = (x+2)e^{-x} = f(x)$.
   Donc F est bien une primitive de f sur $[-2; 4]$.
4. (a) D'après la question précédente, on a $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = F(0) - F(-1) = -3e^0 - (-2)e^1 = 2e - 3$.
   (b) La calculatrice nous donne $2e - 3 \simeq 2{,}4366$.
   Le calcul est donc cohérent avec l'encadrement donné plus haut.

Exercice 4 **Spécialité**

Partie A

1. 

2. La matrice de transition M vaut : $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.
3. On a $\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times M^n$.
   Le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0{,}8$ est $n = 3$, car $p_2 = 0{,}82$ et $p_3 = 0{,}756$.
4. L'état stable est représenté par la matrice $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ telle que $P \times M = P$ et $a + b = 1$.
   Avec l'égalité matricielle on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 0{,}9a + 0{,}1b = a \\ 0{,}1a + 0{,}9b = b \end{cases}$$

Les deux équations de ce système sont équivalentes à l'équation $0{,}1a - 0{,}1b = 0$. Avec l'égalité

$a+b=1$ on résout donc le système :

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ 0{,}1a-0{,}1b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1-b \\ 0{,}1(1-b)-0{,}1b=0 \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1-b \\ 0{,}1-0{,}1b-0{,}1b=0 \end{array}\right. \tag{2}$$

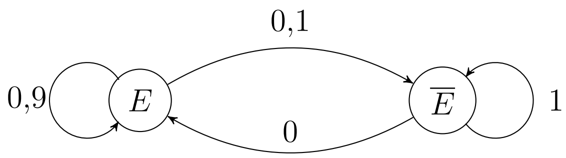
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1-b \\ 0{,}1-0{,}2b=0 \end{array}\right. \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1-b \\ b=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \tag{4}$$

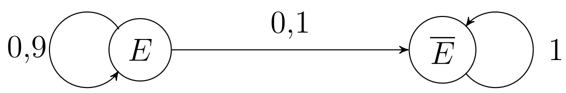
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1-b=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \tag{5}$$

Partie B

1. Cette fois-ci,



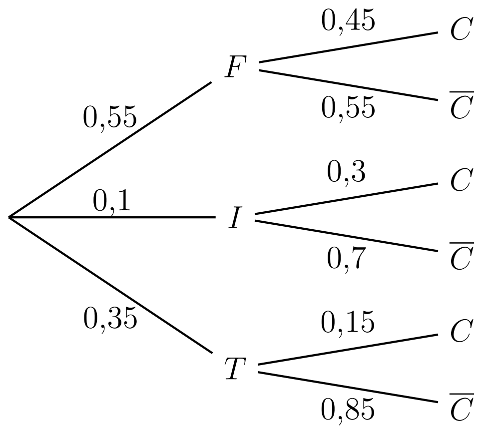
La flèche de $\overline{E}$ vers E n'est pas nécessaire :



2. La matrice de transition N vaut $N=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Par l'égalité matricielle, on a : $p_{n+1}=p_n\times 0{,}9+q_n\times 0=0{,}9\times p_n$.
   La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison 0,9.
4. Puisque $p_0=1$, on a alors $p_n=0{,}9^n$.
5. On doit résoudre :
   $p_n<0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}9^n<0{,}5 \Leftrightarrow \ln(0{,}9^n)<\ln(0{,}5) \Leftrightarrow n\ln(0{,}9)<\ln(0{,}5) \Leftrightarrow n>\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}9)}$.
   On a donc $n>6{,}6$. Le plus petit entier qui vérifie $p_n<0{,}5$ est donc $n=7$.
6. Puisque la raison de la suite p est comprise entre 0 et 1, la limite de cette suite vaut 0. Cela signifie qu'au bout d'un certain nombre d'étapes, la probabilité que l'information soit transmise correctement (à savoir que Paul a réussi son examen) est presque nulle.

Exercice 4 **Obligatoire**

1.



2. (a) L'événement $F \cap C$ est : « l'ancien élève poursuit ses études à la faculté et a fait le choix de vivre en colocation ».
   $\mathbb{P}(F \cap C) = \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_F(C) = 0{,}55 \times 0{,}45 = 0{,}2475$.
   (b) $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(F \cap C) + \mathbb{P}(I \cap C) + \mathbb{P}(T \cap C)$
   $= 0{,}2475 + 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}35 \times 0{,}15 = 0{,}2475 + 0{,}03 + 0{,}0525 = 0{,}33$.
3. On nous demande $\mathbb{P}_C(F) = \dfrac{\mathbb{P}(F \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{0{,}2475}{0{,}33} = 0{,}75$.
4. Pour le vérifier, on doit calculer $\mathbb{P}_{\overline{C}}(F \cup I)$.
   Or $\mathbb{P}_{\overline{C}}(F \cup I) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{C}}(T) = 1 - \dfrac{\mathbb{P}(\overline{C} \cap T)}{\mathbb{P}(\overline{C})} = 1 - \dfrac{0{,}35 \times 0{,}85}{1 - 0{,}33} = 1 - \dfrac{0{,}2975}{0{,}67} \simeq 1 - 0{,}444 \simeq 0{,}556$.
   Puisque cette valeur est supérieure à 0,5, l'affirmation est vraie.
5. On considère l'expérience de Bernoulli consistant à choisir au hasard un ancien élève. Le succès est « l'ancien élève a fait le choix de vivre en colocation ». On a $p = 0{,}33$ d'après la question 2(b).
   L'énoncé permet de supposer que l'on répète cette expérience trois fois de manière indépendante. Le nombre de succès est donc une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}33$. On nous demande $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$.
   Or $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 0{,}67^3 \simeq 0{,}70$ à 10^{-2} près.