Exercice 1 (loi binomiale et autre loi discrète ; espérance)
Une boîte de jeu est constituée de questions portant sur les thèmes *Sport* ou *Musique*. Un tiers des questions portent sur le thème *Sport*, les autres portent sur le thème *Musique*.

Partie A
On pose à Océane une question choisie au hasard dans la boîte et on sait que :

- La probabilité qu'Océane réponde correctement à une question *Sport* est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité qu'Océane réponde correctement à une question *Musique* est $\frac{3}{4}$.

On note :
C : « la question porte sur le thème *Sport* » ;
M : « la question porte sur le thème *Musique* » ;
E : « Océane répond correctement à la question ».

1. Déterminer la probabilité de l'événement (l'écrire à l'aide des événements définis plus haut) : « la question posée porte sur le thème *Musique* et Océane y a répondu correctement ».
2. Montrer que la probabilité de E est $\frac{2}{3}$.
3. On suppose qu'Océane n'a pas répondu correctement à la question posée.
   Quelle est la probabilité pour que la question posée ait porté sur le thème *Sport* ?
4. On pose successivement à Océane quatre questions indépendantes les unes des autres.
   Calculer la probabilité qu'Océane réponde correctement à au moins une question posée.

Partie B
En fait, la partie se déroule de la façon suivante :
On pose à Océane une première question (selon les modalités vues en **Partie A**). Elle marque 5 points si elle répond correctement et le jeu s'arrête. Sinon, on lui pose une deuxième question, choisie indépendamment de la première, et elle marque 2 points si elle répond correctement et le jeu s'arrête. Sinon, on lui pose une troisième question et elle marque 1 point si elle répond correctement, sinon le jeu s'arrête et elle ne marque aucun point. Chaque fois qu'une question est tirée, on remet dans la boîte une question portant sur le même thème.

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Définir la loi de probabilité du nombre de points marqués par Océane.
3. Calculer l'espérance mathématique du nombre de points marqués par Océane. L'interpréter.

Exercice 2 (De la loi binomiale à la loi normale)

1. On lance 100 fois une pièce parfaitement équilibrée. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on obtient Pile.
   (a) Justifier que X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(100; 0{,}5)$.
   (b) Calculer son espérance μ.
   (c) Calculer son écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.
2. On pose $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(X = \mu) = \mathbb{P}(Z = 0)$.
   (b) Dans la calculatrice, entrer les valeurs de X, de 0 à 100, en **liste 1**.
   (c) Entrer ensuite les valeurs de Z en **liste 2**.
   (d) Créer ensuite la liste des probabilités de la loi binomiale $\mathscr{B}(100; 0{,}5)$ en **liste 3**.
   (e) Quelle est la différence entre deux valeurs successives de Z ?

(f) *La somme des probabilités valant 1, si l'on fait pour X un diagramme en bâton avec des bâtons de largeur 1 (la distance entre deux valeurs de X étant 1), la somme des aires des bâtons serait égale à 1.*

Pour Z, la largeur étant limitée à la valeur donnée à la question précédente, par combien doit-on multiplier la hauteur des bâtons ?

(g) Définir alors la **liste 4** comme étant σ multiplié par la **liste 3**.

(h) À partir des **listes 2** et **4**, représenter par un nuage de points (et non sous forme d'histogramme) la loi de Z.

3. On définit la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$.

   (a) Tracer la courbe de φ sur la calculatrice, en plus du nuage de points.

   (b) Qu'observe-t-on ?

   (c) Calculer $\mathbb{P}(45 \leqslant X \leqslant 55)$ à l'aide de la calculatrice.

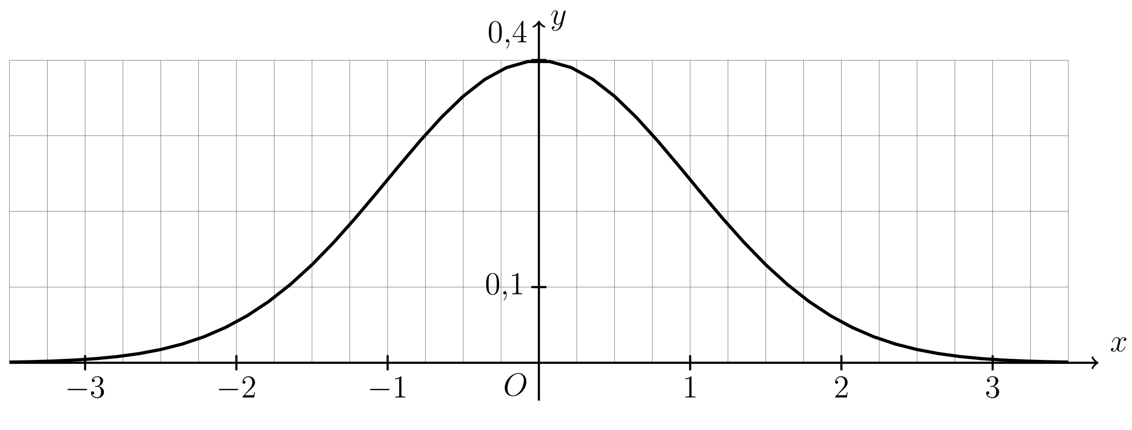
   (d) Justifier que $\mathbb{P}(45 \leqslant X \leqslant 55) = \mathbb{P}(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$.

   (e) Grâce à l'observation faite en 3b, par quelle intégrale peut-on alors approcher la valeur de $\mathbb{P}(45 \leqslant X \leqslant 55)$?

   (f) Donner à l'aide de la calculatrice la valeur de cette intégrale.

Exercice 3 (Utilisation de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$)

Ci-dessous est tracée la courbe de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.



1. Vérifier par lecture graphique que $\mathbb{P}(-1 \leqslant X \leqslant 1) \simeq 0{,}68$.
2. Colorier l'aire correspondant à $\mathbb{P}(X \leqslant -2)$, puis calculer la probabilité à l'aide de la calculatrice.
3. Calculer alors $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$ sans utiliser la calculatrice.

Exercice 4 (Loi uniforme)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.

1. Rappeler l'expression de la fonction densité f de X.
2. Rappeler également l'expression de la fonction de répartition F de X.
3. On suppose ici que $a = 3$ et $b = 10$.

   (a) Représenter f et F sur un même repère.

   (b) Représenter $\mathbb{P}(4 \leqslant X \leqslant 7)$, puis la calculer de plusieurs manières différentes.