Chapitre : Suites

∽

⊛ **Activité :** QCMp24

I. Suites géométriques

1. Rappels

Définition Une suite u est géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le nombre q est appelé **raison** de la suite u.

Propriété Une suite u est géométrique de raison q si et seulement si pour tous entiers naturels m et n $(m \leqslant n)$ on a :

$$u_n = q^n \times u_0 \qquad u_n = q^{n-m} u_m$$

Propriété Soit u une suite géométrique ayant des termes positifs. Alors quelque soit n entier naturel,

$$u_n^2 = u_{n+1} \times u_{n-1} \quad \text{soit} \quad u_n = \sqrt{u_{n+1} \times u_{n-1}}$$

Preuve : Soit q la raison de la suite u. On a $u_n = q \times u_{n-1}$ et $u_{n+1} = q^2 u_{n-1}$. Par suite,

$$u_n^2 = (q \times u_{n-1})^2 = q^2 u_{n-1}^2 = q^2 \times u_{n-1} \times u_{n-1} = u_{n+1} \times u_{n-1}$$

On applique la racine carrée pour obtenir la seconde égalité de la propriété, les termes étant positifs. □

Propriété **(Variations)** Soit q une suite géométrique de raison q et de premier terme strictement positif.

- Si $q > 1$, alors u est strictement croissante ;
- Si $0 < q < 1$, alors u est strictement décroissante.

Exemple $u_n = \frac{1}{2} \times 2^n$ et $v_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Calcul de termes, variations, représentation. Voir la calculatrice.

▶ **Exercices :** 7,8,9,10,12,14,15,17,18p44

2. Somme de termes

⊛ **Activité :** fiche

Propriété Soit q un nombre différent de 1 et n un nombre entier naturel. Alors :

$$1 + q + q^2 \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Preuve : On pose $S = 1 + q + q^2 \cdots + q^n$. On exprime qS, puis on soustrait S.
On obtient $qS - S = q^{n+1} - 1$. Ainsi, puisque $q \neq 1$,

$$S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

□

Propriété Soit u une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors, pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

De manière plus générale, pour tous entiers naturels n et m avec $m > n$,

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m = u_n \frac{1 - q^{m-n+1}}{1 - q} = (\text{premier terme}) \frac{1 - q^{(\text{nombre de termes})}}{1 - q}$$

Preuve : On démontre la formule la plus générale. Il suffit d'écrire tous les termes sous la forme $u_n \times q^i$ puis de factoriser par u_n. On utilise alors la propriété précédente. □

Exemple Exercice 31p45

- **Exercices :** 23,24,25,27,33,36,37,38p45
- **Exercice :** (algorithmique) : Savoir-faire 4p34
- **Exercices :** 21,22,40p45 (suites non géométriques)
- **Exercices :** (DM) 41p45

3. Limites

⊛ **Activité :** fiche

Définition (Limite finie) Une suite u admet une limite fine égale à l si tout intervalle ouvert contenant j contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

Dessin exemple

Définition **(Limite infinie)** Une suite u admet pour limite $+\infty$ si pour tout nombre réel A (aussi grand que l'on veut), tous les termes de la suite u sont supérieurs à A à partir d'un certain rang. On note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Dessin exemple

► **Exercices :** 42,43,44-47p46

Propriété **(Limite de q^n)** Soit q un nombre strictement positif.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$;
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Propriété **(Limite d'une suite géométrique)** Soit u une suite géométrique **positive** de raison $q > 0$.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$;
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

► **Exercices :** 48,50,51,52p46

Propriété **(Limite d'une somme de termes)** Soit u une suite géométrique positive de raison $q > 0$. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$;
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = u_0 \times \dfrac{1}{1-q}$.

Preuve : Il suffit d'observer la forme simplifiée de S_n donnée précédemment, puis de calculer les limites. □

Exemple Voir l'exemple du livre page 32 (un remboursement qui n'atteindra pas l'emprunt)

► **Exercices :** 55,59p47

Notons que l'on peut effectuer des opérations avec les limites (voir seulement le livre) :

Propriété (limite de sommes) Soit u et v deux suites.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = a + b$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$

Propriété (limite de produits) Soit u et v deux suites.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = a \times b$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = -\infty$

II. Suites arithmético-géométriques

⊛ **Activité :** 1p26

Définition Une suite u est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres a et b tels que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Pour déterminer la forme explicite (puis éventuellement la limite) d'une telle suite, on passe généralement par l'utilisation d'une suite géométrique v définie à partir de u.

Exemple Exemple (de l'activité) : $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2{,}5$ et $u_0 = 1$. On pose $v_n = 5 - u_n$. On démontre que v est géométrique de raison 0,5 et de premier terme 4. On a alors : $4 \times 0{,}5^n = 5 - u_n$, soit $u_n = 5 - 4 \times 0{,}5^n$.

▶ **Exercices :** 60,61,62,64p47

▶ **Exercices :** 67,69,70p48

▶ **Exercices :** (éventuellement) 66p48 (DM ?)