Chapitre :
Fonctions

∽

I. Rappels sur la dérivation

⊛ **Activité :** Exercices 2à6p58 (lecture graphique, fonctions et nombre dérivé)
Soit f une fonction dérivable.
Le nombre dérivé $f'(a)$ est, graphiquement, le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

Dessin

C'est également la valeur que prend le rapport suivant :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

lorsque h tend vers 0. Ce rapport représente le taux de variation de f entre a et $(a+h)$.
Lorsque la fonction f représente un **coût total** en fonction d'une quantité de production, le nombre dérivé représente le **coût marginal**, soit une valeur approchée du coût supplémentaire pour la production d'une unité supplémentaire $(f(a+1)-f(a))$.

Pour dériver une fonction, on utilise en général les formules de dérivation, disponibles dans le livre. Voir livre page 64.

▶ **Exercices :** 13 à 17p79, 19,21,22,27,31p80

Propriété La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

▶ **Exercices :** 35p80

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
– Si $f'(x)$ est positive sur I, alors f est croissante sur I ;
– Si $f'(x)$ est négative sur I, alors f est décroissante sur I ;
– Si $f'(x)$ est nulle sur I, alors f est constante sur I.

▶ **Exercices :** 40,41,42,44,45,46p81

Exemple fonction cube ; fonction de degré 2 et tableau de variations

II. Continuité. Théorème des valeurs intermédiaires

⊛ **Activité :** 1p60 (continuité).
Poser la question : à quelles conditions une équation $f(x) = k$ admet une unique solution ?
Utiliser les exercices 51 à 53 de la page 82.

1. Continuité

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est continue sur I si la représentation graphique de f sur I se fait « sans lever le crayon », autrement dit s'il n'y a pas de « saut »

Figures exemples.

Propriété Toutes les fonctions usuelles vues jusqu'à présent sont continues

Propriété Soit f une fonction. Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

▶ **Exercices :** 6 à 10p79

2. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$. Soit k un réel. Si les conditions suivantes sont remplies :

1. k compris entre $f(a)$ et $f(b)$;
2. f est continue sur $[a;b]$;

Alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.
Si de plus f est strictement monotone, alors il existe une unique solution.

▶ **Exercices :** 54,55p82 (rédaction)

▶ **Exercices :** 56,57,58p82 (exercices complets ; utilisation de la calculatrice).

III. Convexité, concavité et points d'inflexion

1. Convexité

⊛ **Activité :** 2p60,61

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si, pour tous points distincts A et B de $\mathcal{C}_f$, le segment $[AB]$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$, alors on dit que la fonction f est convexe sur l'intervalle I.

Propriété
– La fonction carré est convexe sur I.
– La fonction inverse est convexe sur $]0;+\infty[$.
– La fonction cube est convexe sur $]0;+\infty[$.

Figures

▶ **Exercice :** 59p83

Propriété **(Caractérisation)** Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est convexe sur I si et seulement si, quelque soient a et b dans I,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Preuve (partielle) : On démontre que si f est convexe, alors l'inégalité donnée est vérifiée.
On suppose donc f convexe. Soit a et b des réels de I. Soit A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a et B le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse b. On a donc $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.
Soit I le milieu de $[AB]$, alors $I\left(\frac{a+b}{2}; \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$.
Or f est convexe, donc le segment $[AB]$ est situé au dessus de $\mathcal{C}_f$. Par conséquent, l'ordonnée de I est supérieure à l'image par f de son abscisse. Autrement dit,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

□

▶ **Exercice :** 67p83

2. concavité

La concavité est une notion similaire à la convexité :

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si, pour tous points distincts A et B de $\mathcal{C}_f$, le segment $[AB]$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$, alors on dit que la fonction f est concave sur l'intervalle I.

Propriété
– La fonction racine carrée est concavee sur $[0; +\infty[$.
– La fonction inverse est concavee sur $]-\infty; 0[$.
– La fonction cube est concavee sur $]-\infty; 0[$.

Figures

▶ **Exercice :** 60p83
Le lien entre concavité et convexité est le suivant :

Propriété f est concave sur I si et seulement si $-f$ est convexe sur I

Remarque La courbe représentative de $-f$ est symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.

Propriété **(Caractérisation)** Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est concave sur I si et seulement si, quelque soient a et b dans I,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Preuve : f est concave si et seulement si $-f$ est convexe, ce qui équivaut à : quelque soit a et b dans I,

$$-f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{-f(a)+(-f(b))}{2}$$

Soit, en multipliant par (-1) (ce qui change le sens de l'inégalité) :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

□

▶ **Exercice :** 68p83

3. Caractérisations pour les fonctions dérivables

⊛ **Activité :** 3.1 page 61 (utilisation de GeoGebra)

Propriété Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si et seulement si sa représentation graphique est entièrement au dessus de chacune de ses tangentes.
- f est concave sur I si et seulement si sa représentation graphique est entièrement en dessous de chacune de ses tangentes.

Preuve : Admis. □

Propriété Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Preuve : Admis. □

▶ **Exercices :** 63,64p83 (hors points d'inflexion)

Définition L'étude de la convexité d'une fonction est la recherche des intervalles sur lesquels la fonction est convexe, mais aussi des intervalles sur lesquels elle est concave.

▶ **Exercice :** 69p83, 71,72 p84 (études de convexité)

4. Points d'inflexion

Un point d'inflexion correspond à un changement de convexité.
Nous le définirons comme suit :

Définition Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. S'il existe un point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel que la tangente à la courbe en A traverse la courbe en A, alors on dit que A est un point d'inflexion.

figure

Il ne faut pas confondre avec les cas suivants :
– Une droite qui traverse la courbe mais n'est pas tangente ;
– Une tangente qui traverse la courbe, mais en un autre point.

Figures

Propriété Soit f dérivable sur I, dont la dérivée est également dérivable sur I. Si f' change de variation en un réel a de I, alors f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

Définition Pour étudier les variations de f', on peut dériver cette fonction. La dérivée de la dérivée de f est notée f'', on dit « f seconde ».

Remarque La propriété précédente revient à dire, à l'aide des propriétés de la section précédente, qu'un point de changement de convexité est un point d'inflexion.

▶ **Exercices :** 61,62p83

▶ **Exercices :** terminer les 63 et 64 p83

▶ **Exercices :** 65,66p83