Chapitre :
Probabilités

∽

I. Conditionnement

1. Définition

⊛ **Activité :** 1Ap212

Définition On considère une expérience aléatoire et l'ensemble des issues E muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$. Soit A et B deux événements de E, A étant de probabilité non nulle.
La probabilité de B sachant A (ou « sachant que A est réalisé »), notée $\mathbb{P}_A(B)$ est définie par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Exemple Dans le cas où l'on peut observer deux critères A et B sur des individus, on peut par exemple obtenir un tel tableau :

	A	$\overline{A}$	Total
B	2	5	7
$\overline{B}$	2	1	3
Total	4	6	10

on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{10}$ et $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{10}$. Alors $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{2}{10} \times \frac{10}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Remarque On a les égalités suivantes :

$$\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1$$

▶ **Exercices :** 3,4,5,6,7p224

2. Arbres pondérés

⊛ **Activité :** 1Bp213

Pour traduire certaines situations en probabilités, notamment lors de l'étude de deux caractères étudiés dans une population, on peut utiliser des arbres de probabilités.
Construction de l'arbre pour le 1p217 (mentions et filières au bac).
Noter l'importance donnée au choix du premier niveau et du second niveau, en fonction des questions.
Les probabilitées données au second niveau sont des **probabilités conditionnelles**, alors que les probabilités aux feuilles (le bout des branches) sont celles d'une intersection.

▶ **Exercices :** 13p224, 18,19p225, 22,21p226

▶ **Exercice :** (en DM) 14p224

II. Lois à densité

⊛ **Activité :** 1p174 livre Indice (découverte de la densité)

1. Rappels sur les loi discrètes

Définition L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers**, on le note Ω.
Une variable aléatoire, notée le plus souvent X, est une fonction qui à tout élément de l'univers Ω associe un nombre réel.
Si le nombre de valeurs prises par la variable aléatoire est fini, on dit que la variable aléatoire est **discrète**.

Exemple On lance une pièce, on peut obtenir pile (P) ou face (F). Alors $\Omega = \{P; F\}$. Si l'on considère qu'obtenir pile fait gagner 2€ et qu'obtenir face fait perdre 1€, alors on peut considérer la variable aléatoire X telle que $X(P) = 2$ et $X(F) = -1$. La variable aléatoire X est discrète ; elle prend deux valeurs.

Définition Soit x_i une valeur prise par la variable aléatoire X. On note « $X = x_i$ » l'événement constitué des issues de Ω dont l'image par X est x_i.

Exemple Dans l'exemple précédent, « X=2 » est l'événement (élémentaire ici) constitué de l'unique issue P.

Définition La loi de probabilités d'une variable est la donnée, pour toute valeur x_i prise par X, de la probabilité $P(X = x_i)$.

On peut le donner sous forme de tableau, ou sous forme générique dans les cas où cela est possible.

Exemple Dans l'exemple précédent, on donne la loi dans un tableau, dans le cas où la pièce est équilibrée (loi équirépartie) :

x_i	2	-1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Exemple Voir livre page 239 pour un autre exemple, somme des faces obtenues avec deux dés.

Remarque La somme des probabilités données par la loi vaut toujours 1.

2. Variables continues

Définition Soit X une variable aléatoire. Si X prend comme valeurs tous les nombres d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que X est **continue**.

Dans ce cas, la probabilité d'obtenir n'importe quelle valeur précise donnée à l'avance est nulle. Ce qui correspond à la donnée de la loi de probabilité pour une variable continue est la **densité**.

Définition Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée fonction **densité** si :
– f est positive sur $\mathbb{R}$: quelque soit x réel, $f(x) \geqslant 0$;

– f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs (il peut y avoir un nombre fini de sauts) ;
– L'aire située entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f dans un repère orthogonal est égale à 1 u.a.

Le troisième point revient à dire que la somme totale des probabilités vaut 1.

Définition Soit X une variable aléatoire continue ayant pour densité la fonction f. Soit a et b deux réels ($a < b$). Alors la probabilité que X prenne des valeurs comprises entre a et b est :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt$$

Autrement dit il s'agit de l'aire délimitées par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Représentation.

Remarque Soit k un réel quelconque et X une variable aléatoire continue. Alors $P(X = k) = 0$. Par conséquent, $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$. Autrement dit, on ne change pas la probabilité en ajoutant les bornes de l'intervalle $[a; b]$ ou non.

▶ **Exercices :** 3,4p253

▶ **Exercice :** 6p253 (utiliser la calculatrice pour le calcul)

▶ **Exercice :** 7p253

Définition Soit X une variable aléatoire continue de densité f. On appelle fonction de répartition la fonction F définie sur R par :

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

Représentation de l'aire sous la courbe.

En conséquence, on a :

Propriété

$$P(X > a) = 1 - F(a) \qquad P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$$

Figure pour illustrer les propriétés

▶ **Exercice :** 9p253

▶ **Exercices :** 10p254 (en DM ?)

3. Loi uniforme

Définition Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ si elle a pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La variable X prend toutes les valeurs possibles dans l'intervalle $[a; b]$, et ce de manière uniforme.

Représentation de f.

Propriété Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$. Alors la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ \\ 1 \text{ si} x > b \end{cases}$$

Représentation de F.

Remarque Si X suit la loi uniforme sur $[a;b]$ et si c et d sont deux nombres de $[a;b]$ tels que $c < d$, alors

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

soit le rapport entre l'amplitude de $[c;d]$ et celle de $[a;b]$.

▶ **Exercices :** 13(c),15 (sauf c.),16p254 (attention aux probabilités conditionnelles)

4. Espérence

Rappel L'espérance d'une variable aléatoire X prenant un nombre fini de valeurs est donnée par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

Soit la somme des produits des valeurs prises par leur probabilité d'être obtenues.

Définition De manière similaire, pour une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans un intervalle $[a; b]$, et de densité f, son espérence est définie par :

$$E(X) = \int_a^b t \times f(t)dt$$

Propriété Si X suit la loi uniforme sur $[a; b]$, alors

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Autrement dit, si l'on choisit un grand nombre de valeurs données aléatoirement et uniformément dans un intervalle $[a; b]$, alors la moyenne de ces valeurs sera proche de la valeur centrage de l'intervalle $[a; b]$.

▶ **Exercice :** 15p254

5. Loi normale

Introduction : rappels graphiques sur la loi uniforme. Le mot « aléatoire » ne signifie pas toujours « uniformément réparti ». Exemple des tailles. Observation de la cloche. Observation de la loi binomiale, centrée réduite. Introduction de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

a. Loi normale centrée réduite

Définition Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On note $\mathcal{N}(0; 1)$ la loi normale centrée réduite.

Remarque Il n'y a pas d'expression de la primitive de f à l'aide de fonctions usuelles.
Par conséquent, aucune expression de la fonction de répartition ne peut être donnée.

Remarque La fonction f est paire, c'est à dire que la courbe admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

Représentation de la fonction f
Rappel : les points d'inflexion sont en -1 et 1.

b. Loi normale

Définition Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite de moyenne μ et d'écart-type σ si la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
On note $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

La courbe de la fonction de densité pour une telle variable est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\mu$.

Représentation

l'écart-type σ donne une indication des écarts des valeurs prises à la moyenne. Plus σ est grande, plus les écarts peuvent être importants. Ainsi, la courbe de f « s'élargit », tout en s'écrasant vers l'axe des abscisses (l'aire sous la courbe vaut toujours 1 !).

▶ **Exercice :** 25p255

c. Propriétés

Propriété Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$.
Alors

$$P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \simeq 0{,}95$$

Propriété Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.
Alors

$$P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \simeq 0{,}68$$

$$P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \simeq 0{,}95$$

$$P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \simeq 0{,}99$$

Remarque Par symétrie de la courbe de la densité, on a : $P(X \leqslant \mu) = \dfrac{1}{2}$.

Méthode (Calculer une probabilité avec la calculatrice)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(120;10^2)$.
On veut déterminer la probabilité que $X > 150$.

Graphique avec la cloche.

Il faut se ramener au calcul d'une probabilité de la forme $P(a \leqslant X \leqslant b)$.
Ici, on a : $P(X > 150) = \dfrac{1}{2} - P(120 \leqslant X \leqslant 150)$
On utilise la calculatrice pour calculer $P(120 \leqslant X \leqslant 150)$ (voir page 248).
On obtient : $P(X > 150) \simeq 0{,}5 - 0{,}49865 \simeq 0{,}00135$.
Ce qui est très faible (c'est normal : on dépasse $\mu + 3\sigma$!).

▶ **Exercices :** 18p254,20-23p255, exercices de la page 256.