# Chapitre :
# Exponentielle

∽

## I. Fonction exponentielle de base $q$

⊛ **Activité :** 1p98 avec fichier pour tableur : introduction par suite géométrique.

**Définition** Soit $q$ un réel strictement positif. La fonction $x \mapsto q^x$ s'appelle fonction exponentielle de base $q$. Elle est définie, dérivable et **strictement positive** sur $\mathbb{R}$.

On peut calculer des images de cette fonction avec la calculatrice avec la touche $\boxed{\wedge}$ ou $\boxed{x^y}$.

Nous avons remarqué dans l'activité que entre deux points d'abscisse $n$ et $m$, d'ordonnées respectives $q^n$ et $q^m$, nous placions le point d'abscisse $\frac{n+m}{2}$ d'ordonnée $\sqrt{q^n \times q^m}$, qui est sur la courbe. On a donc $q^{\frac{n+m}{2}} = \sqrt{q^n \times q^m}$. On admet qu'en appliquant le carré on obtient : $q^{n+m} = q^n \times q^m$, et que cela reste vrai pour tous les réels :

**Propriété** Pour tous réels $x$ et $y$,

$$q^{x+y} = q^x \times q^y$$

Les propriétés déjà connues avec des entiers se prolongent donc pour des réels.
On dit que l'exponentielle transforme une somme en produit.

Par conséquent :

**Propriété** Soit $x$ et $y$ des réels, soit $m$ un entier relatif. Alors :

$$q^{-x} = \frac{1}{q^x} \qquad q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y} \qquad (q^x)^m = q^{mx}$$

**Preuve :** Exercice ! □

Représentations graphiques pour $0 < q < 1$ et $1 < q$.

▶ **Exercices :** 5,7,8,12p113

▶ **Exercice :** 14p113-114

▶ **Exercices :** 15,16p114

# II. Fonction exponentielle de base $e$

---

⊛ **Activité :** animation geogebra montrant qu'il existe une valeur de $q$ pour laquelle le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe de la fonction exponentielle de base $q$ vaut 1.

**Propriété** Il existe une seule valeur du réel $q$ telle que la tangente au point $A(0;1)$ à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto q^x$ a pour coefficient directeur 1. Cette valeur particulière du réel $q$ est notée **e**. Le réel $e$ est environ égal à 2,718.

**Définition** La fonction $x \mapsto e^x$ est appelée fonction exponentielle de base $e$ ou tout simplement exponentielle. On la note parfois $exp$.

**Propriété** On a les propriétés suivantes, conséquences de celles de la section précédente :
- $exp(x) = e^x$
- La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet 1 pour nombre dérivé en 0 ($exp'(0) = 1$).
- Quelque soit le réel $x$, $e^x > 0$.
- Quelque soient les réels $x$ et $y$ et l'entier relatif $m$,

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad (e^x)^m = e^{mx}$$

**Propriété** pour tout réel $x$, $exp'(x) = e^x$. Autrement dit, la fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée.

**Preuve :** Pour déterminer le nombre dérivé de la fonction de $x$, on étudie le taux de variation :

$$\frac{exp(x+h) - exp(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}$$

Or la fraction de droite est le taux de variation permettant de déterminer le nombre dérivé de la fonction en 0. On sait que le nombre dérivé de l'exponentielle en 0 et 1. Par conséquent, en multipliant par $e^x$, on obtient bien que

$$exp'(x) = e^x$$

□

⚠ ce n'est valable que pour $x \mapsto e^x$ !

En conséquence, puisque la dérivée est strictement positive (car l'exponentielle l'est), la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par suite :

**Propriété**

1. Pour tout réel $x \leqslant 0$, $0 < e^x \leqslant 1$ ;
2. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant 1$ ;
3. Pour tous réels $x$ et $y$, $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ et $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$.

Représentation graphique (avec la tangente en 0).

- ▶ **Exercices :** 21,22,25p114
- ▶ **Exercice :** 27p114-115 (dérivation en produit ou quotient)
- ▶ **Exercices :** 28,30,32,33,34p115 (études de fonctions)
- ▶ **Exercices :** 36,38,39p115 (équations)