Chapitre :
Intégrales et primitives

∽

⊛ **Activité :** 9 et 10 page 166 (aires de triangles et trapèzes).

I. Intégrale d'une fonction continue positive

⊛ **Activité :** 1 pages 168 et 169 (jusqu'à 3 inclu)

Définition Soit a et b deux réels, f une fonction continue positive sur l'intervalle $[a;b]$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(0;I;J)$.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, en unités d'aires, délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
Ce nombre est noté :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque Le nom de la variable dans l'intégrale n'a pas d'importance :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

Figure

Le symbole de l'intégrale fait penser à un 'S', on peut voir cela comme la somme des aires de rectangles de largeur presque nulle, comme introduit dans l'activité.

Exemple On peut calculer sans trop de problèmes cette aire pour des fonctions affines (sur les intervalles où elles sont positives). Soit $f(x) = x+4$. Calculer $\int_{-2}^3 f(t)\mathrm{d}t$.

▶ **Exercices :** 4,5,6,7p189

▶ **Exercices :** 10,11,12p190

▶ **Exercices :** 13,14p190 (utilisation de la calculatrice, voir page 179)

II. Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

⊛ **Activité :** 1.4 page 169

Définition Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel x de l'intervalle $[a;b]$ on peut considérer l'intégrale :

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Qui représente l'aire comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[a;x]$. Par suite, on considère la fonction F définie sur $[a;b]$ par :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Propriété La fonction F est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f : $F' = f$.
D'autre part,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Ainsi, pour calculer l'intégrale, il suffit de connaître la fonction F.

En fait, plus généralement :

Propriété Soit F une fonction dérivable telle que $F' = f$. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Il suffit donc de trouver une fonction F dont la dérivée est f pour calculer l'intégrale.

Définition Soit F une fonction dérivable sur $[a;b]$ telle que $F' = f$. On dit que F est une primitive de f sur $[a;b]$

Exemple Calculer $\int_0^1 2t dt$ de deux manières différentes.

Nous reviendrons plus tard sur des méthodes permettant de déterminer certaines primitives.

▶ **Exercice :** 16p190

▶ **Exercices :** 18p191

III. Déterminer des primitives

⊛ **Activité :** 2p169 et exercice 25p192
Nous avons vu dans la section précédente qu'une fonction F dérivable telle que $F' = f$ est appelé **primitive** de f.

1. Lien entre les primitives d'une fonction

Théorème Toute fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ admet des primitives sur $[a; b]$.

Preuve : Admis. □

Propriété Soit F une primitive de f sur l'intervalle I. Alors toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel.

Remarque Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle donné diffèrent donc d'une constante.

▶ **Exercice :** 22p191
Par conséquent :

Propriété Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de I et soit y_0 un réel donné. Alors il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Preuve : Démontrons l'existence :
En effet, soit F une primitive de f sur I. Alors G, définie sur I par $G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$ est une primitive de f sur I et $G(x_0) = y_0$.
Démontrons l'unicité :
Supposons qu'il existe une autre fonction G_1, primitive de f sur I telle que $G_1(x_0) = y_0$. Alors on sait qu'il existe une constante c telle que pour tout x de I, $G_1(x) = G(x) + c$. Or pour $x = x_0$ on obtient $0 = 0 + c$. Autrement dit, $c = 0$ et $G_1 = G$. □

Exemple Chercher la primitive de $f(x) = 5x^2 + 3x + 2$ qui s'annule en 2.

▶ **Exercice :** 31p193

2. Recherche de primitives

Nous donnons ici des résultats permettant d'obtenir des primitives de certaines fonctions.

Propriété Soit F et G des primitives de f et g.
Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$.
Soit k un réel. Alors kF est une primitive de kf.

Ces formules (évidentes à démontrer) sont les seules formules faciles pour déterminer une primitive. Il n'y a en effet pas de formule pour le produit ou le quotient de fonctions.

On pourra cependant se référer aux tableaux du livre page 174 (à recopier !).
Le premier tableau ainsi que la proposition précédente permettent de trouver des primitives de n'importe quelle fonction polynomiale.

Exemple Chercher une primitive de $f : x \mapsto 5x^3 - 4x + 3$

▶ **Exercices :** 28p192, 32p193
Le second tableau permet de déterminer des primitives de certaines fonctions plus complexes.

Exemple Chercher une primitive de $g : x \mapsto \dfrac{4x}{(2x^2+4)^2}$

▶ **Exercices :** 37p193, 43p194, 38,40p194

▶ **Exercices :** 47,48p194 (intégrales)

IV. Autres propriétés de l'intégrale

Propriété La formule suivante :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

est valable quelques soient a et b dans un intervalle I dans lequel la fonction f, de signe quelconque, admet la fonction F pour primitive sur I.

Remarque En particulier, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Propriété **(Linéarité)** Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et soit α un réel. Alors :
- $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;
- $\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Preuve : Exercice. □

▶ **Exercice :** 50p195

Propriété **(Positivité)** Soit a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Si, pour tout réel $x \in [a;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Preuve : Soit F une primitive de f sur $[a;b]$. Comme f est positive sur $[a;b]$, comme f est la dérivée de F, on en déduit que F est croissante sur $[a;b]$. Par conséquent, $F(b) \geqslant F(a)$, donc $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \geqslant 0$. □
Voici une conséquence de la propriété précédente :

Propriété **(Comparaison)** Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Si, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Preuve : Il suffit de considérer la fonction $\varphi : x \mapsto g(x) - f(x)$, positive sur $[a;b]$. On a alors $\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$ d'après la proposition précédente.
Or par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (g(t) - f(t))\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
On a alors $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$, soit $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$. □

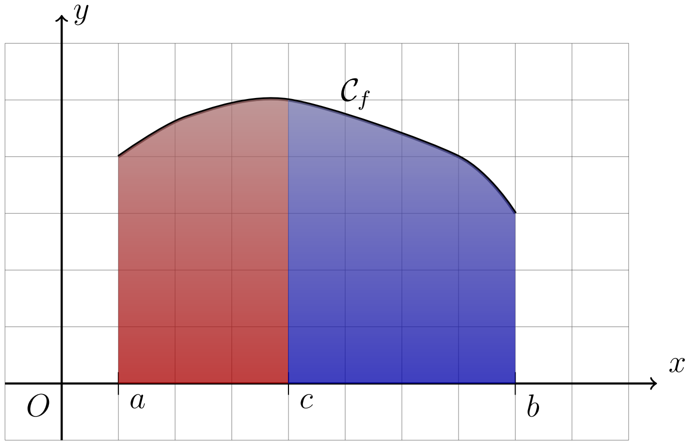
▶ **Exercices :** 52,54,55,56p195

Propriété **(Relation de Chasles)** Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit $c \in [a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

On appelle cette relation la relation de Chasles

Preuve : Exercice. □
Illustration graphique :



Cette propriété est utile dans le cas où l'on souhaite calculer l'intégrale d'une fonction définie par morceaux.

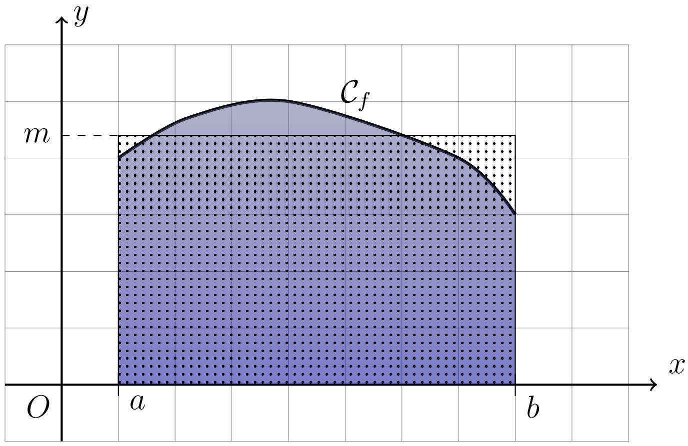
▶ **Exercices :** 58,59p195

▶ **Exercice :** 62p196 (aire entre deux courbes)

<u>Définition</u> (Valeur moyenne) Soit a et b deux réels tels que $a < b$. La valeur moyenne d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$ est :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

L'interprétation graphique est la suivante :



La zone bleue et le rectangle ont la même aire. En effet, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = m \times (b-a)$.

▶ **Exercices :** 68p196, 70,71,74p197