Chapitre :
Fonction logarithme

∽

⊛ **Activité :** 1p130 (symétrie de la courbe de la fonction exponentielle)

I. Définition et représentation

Définition La fonction exponentielle étant continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs sur $]0;+\infty[$, quelque soit le réel positif k, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution. On note cette solution $x = \ln k$, et on lit « logarithme de k ».
On définit alors la fonction logarithme (néperien) sur $]0;+\infty[$ par la relation :

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$$

La courbe représentative est, de part sa définition, symétrique de celle de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$ (abscisses et ordonnées sont échangées).
On dit que les deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre.

Représentation de la fonction ln

Tableau de variations

Propriété La fonction logarithme est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

▶ **Exercices :** 16 et 17 p149

II. Propriétés calculatoires

Propriété
- Quelque soit $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Quelque soit x réel, $\ln(e^x) = x$.
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

Preuve : Il suffit d'utiliser la définition précédente. En particulier, pour la dernière, puisque $e = e^1$, on a bien $\ln(e) = 1$. □

▶ **Exercices :** 6 à 11 p149

▶ **Exercices :** 29,30,31,32,33p150

Propriété La fonction logarithme est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Autrement dit la dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse.

Preuve : Nous admettons que ln est dérivable. Justifions que sa dérivée est la fonction inverse. Pour cela, il suffit de considérer la fonction $x \mapsto e^{\ln(x)}$, qui est plus simplement la fonction identité $x \mapsto x$ d'après la propriété précédente, puis appliquer la formule de dérivation de e^u (vue dans le chapitre sur l'exponentielle). $\square$

Remarque Grâce à l'expression de la dérivée, on en déduit que la fonction logarithme est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

▶ **Exercices :** 42,43,44p150

Propriété Soit a et b deux réels strictement positifs. Alors :
- $a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$
- $a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$

Preuve : Ces deux points sont conséquence immédiate de la stricte croissance de la fonction. $\square$

Exemple Pour résoudre une équation du type $\ln(X) \leqslant a$, deux points de vue :
– on considère que $a = \ln(e^a)$. Par suite,

$$\ln(X) \leqslant a \Leftrightarrow X \leqslant e^a$$

– on utilise la stricte croissante de l'exponentielle :

$$\ln(X) \leqslant a \Leftrightarrow e^{\ln(X)} = e^a \Leftrightarrow X \leqslant e^a$$

La difficulté réside dans le fait de résoudre sur l'ensemble où $X > 0$.

▶ **Exercices :** 35p150 et 41p150 (équations et inéquations)

▶ **Exercice :** 49p151 (dérivation et étude du signe de la dérivée)

Propriété **(Relation fonctionnelle)** Soit a et b deux réels strictement positifs. Alors :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

On dit que le logarithme transforme un produit en somme.

Preuve : On sait que l'exponentielle transforme une somme en produit :

$$e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b = e^{\ln(a \times b)}$$

Par conséquent,

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$$

$\square$

Exemple $\ln(12) = \ln(4\times3) = \ln(4)+\ln(3) = \ln(2\times2)+\ln(3) = \ln(2)+\ln(2)+\ln(3) = 2\ln(2)+\ln(3)$

La propriété précédente a les conséquences suivantes :

Propriété Soit a et b deux réels strictement positifs. Alors :

- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Preuve : Exercice (en faire un) $\square$

Ces propriétés permettent de réécrire des expressions.

▶ **Exercices :** 54 à 58 p151

▶ **Exercice :** 65p152

▶ **Exercices :** 72,73,70p152 ($a^k = b$)