Chapitre :
Fluctuation et estimation

∽

I. Intervalles de fluctuation

⊛ **Activité :** 1p264

Rappel On considère une population dont une proportion p connue possède un caractère donné. La variable aléatoire X qui à tout échantillon de taille n associe le nombre d'individus qui possèdent le caractère étudié suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Définition À la variable aléatoire X on associe la variable aléatoire fréquence, $F = \dfrac{X}{n}$.

La variable F prend donc les valeurs $0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, 1$

▶ **Exercices :** 5,6p278
Dans la suite, pour que les résultats soient valides, on suppose que :

$$n \geqslant 30 \qquad n \times p \geqslant 5 \quad \text{et} \quad n \times (1-p) \geqslant 5$$

Définition Un intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil 0,95 est un intervalle déterminé à partir de p et n et qui contient la valeur de F avec une probabilité d'autant plus proche de 0,95 que n est grand.
Il est donné par :

$$\left[p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Rappel L'intervalle de fluctuation vu en seconde était le suivant :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Cet intervalle est plus grand que l'intervalle asymptotique, donc moins précis. Le calcul de cet intervalle est soumis aux contraintes suivantes :

$$n \geqslant 25 \quad \text{et} \quad 0{,}2 \leqslant p \leqslant 0{,}8$$

Rappel L'intervalle de fluctuation obtenu à partir de la loi binomiale (vu en première) se fait ainsi :
On détermine deux entiers a et b de la manière suivante :
- a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) \geqslant 0{,}025$
- b est le plus petit entier tel que $P(X \geqslant b) \leqslant 0{,}025$ (autrement dit que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$)

On a alors $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0{,}95$.
Cet intervalle n'est sousmis à aucune contrainte, mais sa détermination n'est pas simple.

▶ **Exercices :** 11,12,13p279

▶ **Exercice :** 15p280 (comparaison des intervalles de 2^{nde} et de T^{ale}).

▶ **Exercice :** 16p280 (comparaison des trois)

▶ **Exercice :** 9p278 (observation du lien avec la loi normale et $P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \simeq 0{,}95$)

Méthode La connaissance de cet intervalle permet une **prise de décision**.
Quand la proportion p dans la population totale est supposée connue, on peut tester l'hypothèse selon laquelle un échantillon donné est représentatif de la population totale.
Pour cela :
– On calcule la fréquence f observée pour l'échantillon ;
– On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 ;
– Si f appartient à l'intervalle, on valide l'hypothèse faite sur la proportion p.
  Dans le cas contraire, on rejette l'hypothèse, avec un risque de 5% de se tromper.

Exemple $p = 0{,}6$, $n = 50$, $f = \dfrac{35}{50}$.
On vérifie : $n = 50 \geqslant 30$, $n \times p = 30 \geqslant 5$ et $n \times (1-p) = 20 \geqslant 5$.
On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 :

$$0{,}4642 ; 0{,}7358$$

Or $f = \dfrac{35}{50} = 0{,}7$. Comme f appartient à l'intervalle, on valide l'hypothèse.

▶ **Exercices :** 17,18,19 pages 280,281

II. Intervalles de confiance

Définition Un intervalle de confiance pour une proportion p au niveau de confiance 0,95 est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95

Propriété Si f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n, on donne comme intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 l'intervalle suivant :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Si les conditions suivantes sont vérifiées : $n \geqslant 30$, $N \times f \geqslant 5$ et $n \times (1-f) \geqslant 5$.

Cet intervalle a déjà pu être vu en seconde.

Exemple Exercice 20p281

Remarque Il existe un autre intervalle de confiance, basé sur l'intervalle de fluctuation vu précédemment :

$$\left[f - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} ; f + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$$

▶ **Exercices :** 21p281, 23,24,25p282