LYCÉE ALFRED KASTLER **TES-spé**
2012–2013

Exercice 1 Les parties I et II sont indépendantes
Partie I (calculs exacts demandés)
Sur une route, deux intersections successives, "a" et "b" sont munies de feux tricolores. On suppose que ces feux ne sont pas synchronisés et fonctionnent de manière indépendante On admet que :

- La probabilité que le feu de "a" soit vert est égale à $\frac{3}{4}$;
- La probabilité que le feu de "b" soit vert est égale à $\frac{1}{2}$.

On note A l'évènement : « le feu de "a" est vert », B l'évènement « le feu de "b" est vert ».
Un automobiliste passe successivement aux deux intersections "a" et "b".

1. Calculer la probabilité qu'à son passage, les deux feux soient verts.
2. Calculer la probabilité qu'à son passage, il rencontre au moins un feu vert.

Partie II (résultats demandés à 10^{-2} près)
Pour se rendre à son travail, Mathurin rencontre une succession d'intersections de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessous :
À chaque intersection :

- Si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,9 ou sera rouge avec la probabilité 0,05.
- Si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,1 ou sera vert avec la probabilité 0,8.
- Si le feu est rouge, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,5 ou sera orange avec la probabilité 0,05.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- V_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu vert à la n-ième intersection,
- O_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu orange a la n-ième intersection,
- R_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu rouge à la n-ième intersection,
- $P_n = [V_n \quad O_n \quad R_n]$ la matrice traduisant l'état probabiliste du n-ième feu tricolore.

1. (a) Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation.
   (b) Donner la matrice de transition M complétée de ce graphe :

$$M = \begin{bmatrix} \dots & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & \dots & 0{,}1 \\ 0{,}45 & \dots & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

2. (a) Si le premier feu rencontré est vert, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.
   (b) On donne $P_3 = [0{,}87 \quad 0{,}05 \quad 0{,}08]$. Quelle est la probabilité que le quatrième feu soit vert ?
3. Si le premier feu rencontré est rouge, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.
4. On remarque que, quelle que soit la couleur du premier feu rencontré, on obtient à partir d'un certain rang n : $P_n = [0{,}85 \quad 0{,}05 \quad 0{,}10]$.
   Donner une interprétation concrète de ce résultat.

Exercice 2 Un ciné-club qui projette des films français et étrangers dispose de deux salles. Les abonnés au ciné-club assistent systématiquement à une projection chaque lundi soir.

- La probabilité qu'un spectateur ayant vu un film français à une séance retourne voir un film français à la séance suivante est égale à 0,6.

- La probabilité qu'un spectateur ayant vu un film étranger à une séance aille voir un film français à la séance suivante est égale à 0,75.

Un lundi soir, un film français est projeté dans chacune des deux salles. Puis les semaines suivantes, le ciné-club propose dans une salle un film français et dans l'autre un film étranger.
On cherche à étudier l'évolution de la répartition des spectateurs entre les deux salles au cours des semaines suivantes, à partir de ce lundi.

1. On note A l'état : « le spectateur voit un film français ».
   On note B l'état : « le spectateur voit un film étranger ».
   (a) Représenter la situation ci-dessus par un graphe probabiliste.
   (b) On note M la matrice de transition de ce graphe en considérant les états dans l'ordre alphabétique. Justifier que $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$
2. Soient A_n l'évènement : « Le spectateur voit un film français à la n-ième séance » et B_n l'évènement : « Le spectateur voit un film étranger à la n-ième séance ».
   L'état probabiliste de la répartition des abonnés dans les deux salles lors de la n-ième séance est donné par la matrice ligne $T_n = (a_n \quad b_n)$ ou $a_n = P\left(\mathrm{A}_n\right), b_n = P\left(\mathrm{B}_n\right)$ et $a_n + b_n = 1$.
   L'état probabiliste initial est donc donné par $T_1 = (1 \quad 0)$.
   Déterminer les matrices T_2 et T_3. En donner une interprétation en termes de répartition des abonnés dans les deux salles.
3. Déterminer la valeur arrondie au centième des réels x et y définissant l'état limite $T = (x \quad y)$ vers lequel converge la suite (T_n). Interpréter le résultat.

Exercice 3 Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.
Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.
L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.
Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

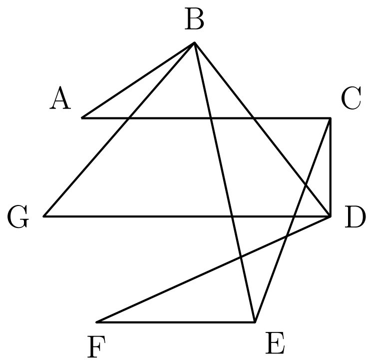
1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.
3. (a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
   (b) Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0{,}3 \quad 0{,}7)$.
4. (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n.
   (b) En déduire la matrice ligne P_3. Interpréter ce résultat.

Dans la question suivante, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

5. Soit $P = (a \quad b)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.
   (a) Déterminer a et b.
   (b) Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.

Exercice 4

Sur le graphe ci-contre, les sept sommets A, B, C, D, E, F et G correspondent à sept villes. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une liaison entre les deux villes correspondantes.



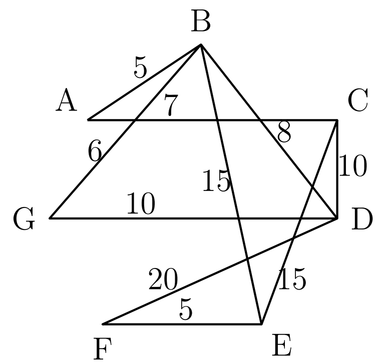
Les questions 1, 2 *et* 3 *sont indépendantes.*

1. Est-il possible de trouver un trajet, utilisant les liaisons existantes, qui part d'une des sept villes et y revient en passant une fois et une seule fois par toutes les autres villes ?
2. On note M la matrice associée au graphe ci-dessus. Les sommets sont rangés suivant l'ordre alphabétique.

   On donne $\mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 10 & 9 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & 9 & 2 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

   Donner le nombre de chemins de longueur 3 qui relient le sommet A au sommet F.

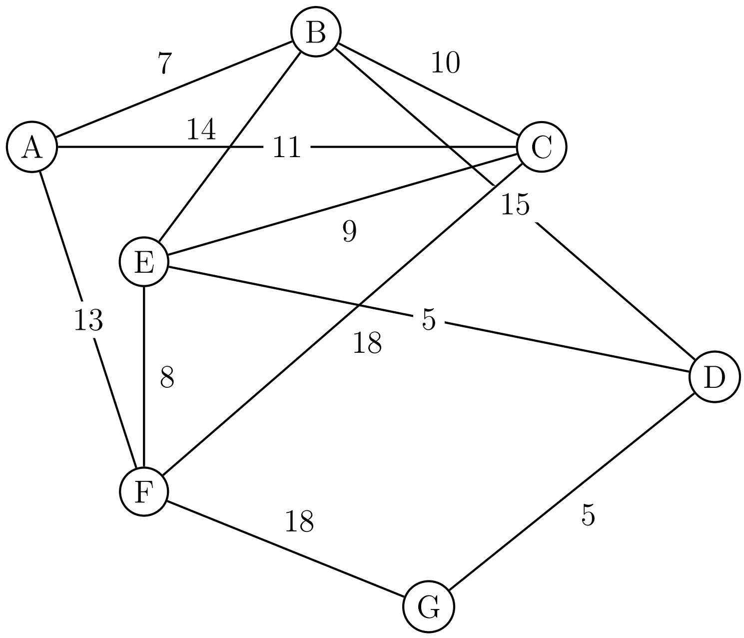
   Les citer tous. Aucune justification n'est demandée.
3. On donne ci-dessous et sur le graphe ci-contre les distances exprimées en centaines de kilomètres entre deux villes pour lesquelles il existe une liaison :
   AB : 5 ; AC : 7 ;
   BD : 8 ; BE : 15 ;
   BG : 6 ; CD : 10 ;
   CE : 15 ; DF : 20 ;
   DG : 10 ; EF : 5 ;
   Un représentant de commerce souhaite aller de la ville A à la ville F.



   En expliquant la méthode utilisée, déterminer le trajet qu'il doit suivre pour que la distance parcourue soit la plus courte possible et donner cette distance.

Exercice 5 Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service. Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix. la ville comporte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G.

Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-contre.



1. Philippe, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables. A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables. Justifier la réponse. À la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse.
2. On appelle M la matrice associée à ce graphe. on donne deux matrices N et T :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Une des deux matrices N ou T est la matrice M^3. Sans calcul, indiquer quelle est la matrice M^3. Justifier la réponse.

   (b) Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, il est passé exactement deux fois devant une station. Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Expliquer.

3. Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A. À l'aide d'un algorithme, déterminer un tel parcours et donner le temps nécessaire pour l'effectuer.