

Chapitre :

Graphes



I. Graphes non orientés

⊗ **Activité** : 1 pp342-343

Définition

- Un **graphe** est un ensemble de points et de lignes reliant certains de ces points.
- Un **sommet** du graphe est un point du graphe. Le nombre de sommets est appelé **ordre** du graphe.
- Une **arête** du graphe est une ligne reliant deux sommets. Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même.
- Un sommet est **isolé** lorsque aucune arête ne le relie aux autres sommets.
- Un graphe **simple** est un graphe sans boucle tel qu'entre deux sommets il y a au plus une arête.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
- Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité. Une boucle compte alors pour 2.

Dessins exemples

► **Exercices** : 6-9 p376

Théorème | La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes

Preuve :Évident, puisque une arête compte deux sommets, donc est comptée deux fois dans le calcul des degrés. □

► **Exercices** : 10,11p376

Définition Un graphe complet est un graphe simple dont tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres.

Dans un graphe d'ordre n , chaque sommet a donc pour degré $n-1$, et le nombre d'arêtes est $\frac{n(n-1)}{2}$.

Dessin graphe complet d'ordre 4

► **Exercices** : 12,13p377

II. Matrice associée à un graphe

⊗ **Activité** : 2p345

Définition

- **Une chaîne** est une suite d'arêtes mises bout à bout.
- **La longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui la composent.
- Une chaîne est dite **fermée** si ses extrémités coïncident.
- Une chaîne fermée est un **cycle** si toutes les arêtes de la chaîne sont distinctes.
- **La distance entre deux sommets** est la longueur de la plus petite chaîne les reliant.
- **Le diamètre d'un graphe** est la plus grande distance existante dans le graphe

On décrit une chaîne en écrivant la succession des sommets par lesquels elle passe.

Exemple Dessin d'un graphe et exemples de chaînes

► **Exercices** : 18p377

On peut s'intéresser à la longueur d'une chaîne reliant deux sommets d'un graphe. On peut également vouloir connaître le nombre de chaînes de longueur donnée reliant deux sommets donnés. Pour déterminer cela, on peut utiliser les matrices.

Définition La matrice associée à un graphe d'ordre n est la matrice carrée A de dimension $n \times n$ telle que l'élément a_{ij} vaut le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j .
Si i et j ne sont pas adjacents, alors $a_{ij} = 0$.

Exemple donner la matrice associée du graphe précédent.

► **Exercice** : 14p377

Théorème | Soit A^p la puissance p -ième de A . L'élément p_{ij} de A^p est égal au nombre de chaînes de longueur p reliant les sommets i et j .

Preuve : Voir le livre page 347

□

► **Exercices** : 16,17p377

III. Cycles eulériens et chaînes eulériennes

⊗ **Activité** : 3 des pages 348 et 349

Définition Un graphe est connexe si deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne.

Définition On appelle chaîne eulérienne une chaîne contenant une fois et une seule chacune des arêtes du graphe.

On appelle cycle eulérien un cycle qui est une chaîne eulérienne.

Exemple Deux graphes : « maison » et « étoile à cinq branches ».

Théorème | Soit G un graphe connexe.

G admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.

G admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets ayant un degré impair est 2. Dans ce cas, les deux sommets en question sont les extrémités de la chaîne.

Preuve : Lire le livre page 351. Sauf le point où l'on affirme qu'il existe une chaîne A-B dont l'un des sommets n'appartient pas à la chaîne :

Il existe une arête par laquelle C ne passe pas.

Si la chaîne (cycle) C passe par A, on considère la chaîne B-A- C (C vue comme chaîne de A à A), qui est plus longue.

Sinon, on suit les indications du livre. □

Méthode Voir l'algorithme page 352 (insertion de cycles par étapes)

► **Exercices** : 19,21,22,23 p378

IV. Graphes orientés, pondérés, étiquetés

⊗ **Activité** : pages 353,354 (à faire en plusieurs parties)

Définition (Graphe orienté) Un graphe est orienté si les arêtes ne peuvent être parcourues que dans un sens. L'orientation est indiquée par une flèche.

On utilise les mots :

- **arc** pour une arête orientée ;
- **chemin** pour une chaîne ;
- **chemin fermé** pour un cycle ;
- **circuit** pour un chemin fermé dont tous les arcs sont distincts.

On définit de même la matrice associée à un graphe orienté. Elle n'est plus nécessairement symétrique.

► **Exercices** : 29,30,31p380

Définition (Graphe étiqueté, pondéré) Un graphe **étiqueté** est un graphe dont les arêtes portent une étiquette (nom, nombre).

Un graphe pondéré est un graphe étiqueté dont les étiquettes sont des nombres (dont la somme a un sens) appelés poids.

Le poids d'une chaîne est la somme des poids des arêtes de la chaîne.

Une plus courte chaîne entre deux sommets est alors une chaîne de poids minimal.

Exemple Voir le livre page 355

La recherche de la chaîne la plus courte fait l'objet d'un algorithme à connaître : l'algorithme de Moore-Dijkstra.

Voir page 356 l'algorithme de Moore-Dijkstra. Application page 366.

► **Exercices** : 33,34,35,36p381