DEVOIR DE TYPE BAC
16 janvier 2013

MATHÉMATIQUES

Série STG

C.F.E.

Durée de l'épreuve : 3 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions de ce QCM une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte vaut 1 *point. Une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*
Si le total des points est négatif la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Pour tout réel x strictement positif, $\ln(x^2 + x)$ est égal à :

   a. $\ln(x^2) \times \ln(x)$ **b.** $\ln(x) + \ln(x + 1)$ **c.** $\ln(x^2) + \ln(x)$

2. La valeur d'une imprimante achetée 850 € se déprécie de 20 % par an.
   Quelle est sa valeur après trois ans ?

a. 340 €	**b.** 435,20 €	**c.** 544 €	**d.** 498,85 €

3. Les dépenses du service Communication d'une entreprise sont passées de 2 000 € en 2006 à 6 800 € en 2008.

   3. 1. Le pourcentage d'augmentation est :

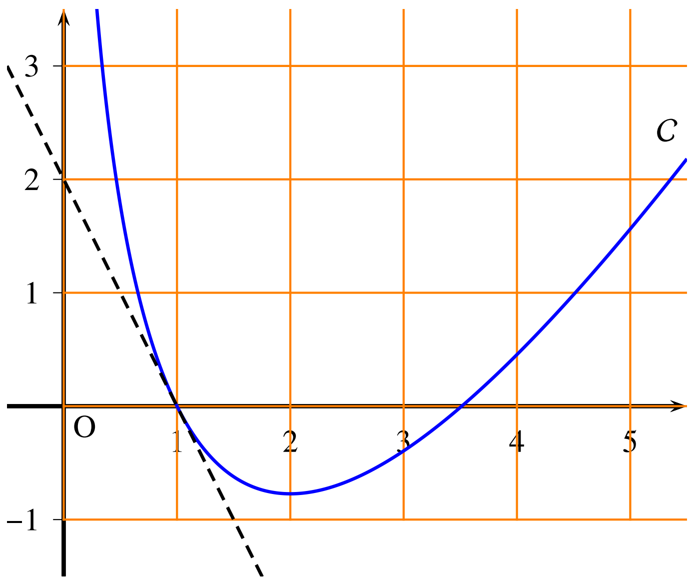
a. 3,4 %	**b.** 340 %	**c.** 240 %	**d.** 48 %

   3. 2. La meilleure approximation du taux d'évolution annuel moyen est

a. 113,33 %	**b.** 120 %	**c.** 84,39 %	**d.** 54,92 %

Exercice 2 (6 points)

La courbe C tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$. Elle passe par le point de coordonnées $(1; 0)$ et admet un minimum en $x = 2$.



La droite tracée en pointillés est la tangente à C au point d'abscisse 1.

Partie A

Dans cette partie, il est demandé de répondre aux différentes questions par lecture graphique. Aucun calcul n'est donc attendu.

1. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
3. Déterminer $f'(1)$.

Partie B

En fait, la fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - 2 - 4\ln(x).$$

1. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{x}$ pour tout $x > 0$.
2. On admet que f est décroissante sur $]0; 2]$ puis croissante sur $[2; +\infty[$. En déduire le tableau de variation de f. On indiquera la valeur exacte du minimum.
   On notera α la solution de l'équation $f(x) = 0$ appartenant à l'intervalle $[3\ ;\ +\infty[$.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Partie C

Soit C la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 6]$ par :

$$C(x) = x^2 + 2x - 4x\ln(x).$$

Une entreprise fabrique des boîtiers de télécommande plastiques. Lorsque l'entreprise fabrique x centaines de boîtiers par jour, le coût moyen de production d'un boîtier est égal à $C(x)$ (x est compris entre 1 centaine et 6 centaines). Le coût moyen est exprimé en euros.

1. Montrer que $C'(x) = 2x - 2 - 4\ln(x)$ où C' désigne la fonction dérivée de C sur $[1\ ;\ 6]$.
2. À l'aide de l'étude faite dans la partie B, déterminer le signe de $C'(x)$ sur $[1\ ;\ 6]$.
3. On admet que C est décroissante sur $[1; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; 6]$, α étant le nombre introduit dans la partie B.
   Établir alors le tableau de variation de C sur l'intervalle $[1\ ;\ 6]$. On donnera une valeur approchée au centième du minimum.
4. En déduire le nombre de boîtiers à produire par jour pour que le coût de production d'un boîtier soit minimum. On donnera une valeur approchée du résultat à un boîtier près.

Exercice 3 (4 points)
Monsieur Prévoyant place un capital de 3 000 euros sur un compte rémunéré à intérêts composés.
Le taux de placement est de 3 % l'an.
Tous les ans, au premier janvier, il ajoute 50 euros sur ce compte.
Soit C_n le capital, en euros, après n années de placement. On a ainsi $C_0 = 3\ 000$.

1. Justifier que $C_1 = 3\ 140$.
2. Déterminer C_2.
3. Justifier que pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 1{,}03C_n + 50$.
4. Monsieur Prévoyant veut utiliser une feuille de calcul d'un tableur pour déterminer son capital en fonction du nombre d'années de placement.

	A	B
1	Taux de placement en %	3
2	Ajout annuel (en euros)	50
3		
4	Nombre d'années de placement	Capital en euros au bout de n années
5	0	3 000,00
6	1	
7	2	
8	3	
9	4	

Le format des cellules B5 à B9 est monétaire avec 2 décimales.

(a) Indiquer une formule à entrer en B6 qui, par recopie vers le bas, permet de compléter la plage de cellules B6 : B9.

(b) Quel est le capital au bout de 4 années de placement ?

Exercice 4 (6 points)

Depuis quelques années, le nombre de personnes tuées sur les routes de France a considérablement diminué. Le tableau suivant présente le bilan de l'année 2001 à l'année 2007.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombres de personnes y_i	8 160	7 655	6 058	5 530	5 318	4 942	4 838

Source : site officiel de la sécurité routière

La courbe C_f tracée sur l'annexe (à rendre avec la copie) est la courbe représentative d'une fonction f étudiée dans la partie B.

Partie A : *Dans cette partie, on ne tiendra pas compte de la courbe* C_f

1. Représenter le nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$ sur l'annexe à rendre avec la copie.
2. On décide de réaliser un ajustement affine à l'aide de la droite d'équation $y = -580x + 8\,400$.
   Tracer cette droite sur le graphique de l'annexe à rendre avec la copie.
3. Déterminer le nombre de tués prévus en 2010 par ce modèle. Indiquer la méthode utilisée.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 15]$ par

$$f(x) = -1\,900\ln(x) + 8\,400.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur ce même intervalle.

1. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Justifier que $f'(x)$ est négatif sur l'intervalle $[1\ ;\ 15]$.

   Dans la suite de cette partie, on décide de modéliser l'évolution du nombre de personnes tuées sur les routes de France à l'aide de la fonction f.
2. Déterminer par le calcul le nombre de tués prévus en 2010 par ce modèle (arrondir à l'unité).

Partie C :

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Parmi les deux modèles étudiés dans la partie A et la partie B, indiquer celui qui ne permet pas d'obtenir une prévision réaliste en 2015. Justifier la réponse.

Annexe à rendre avec la copie